

ASTEROIDES PRÓXIMOS DA TERRA

Determinação de Órbitas e
Avaliação de Risco de Impacto



Anderson de Oliveira Ribeiro e
Daniel Guimarães Tedesco

 editora

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
(CIP)**

S615 Ribeiro, Anderson de Oliveira.
Asteroides próximos da terra : determinação de órbitas e
avaliação de risco de impacto / Anderson de Oliveira Ribeiro e
Daniel Guimarães Tedesco. -- Volta Redonda, RJ: FERP, 2025.
x, 200p. : il.

ISBN: 978-65-89356-13-4

1. Asteroides. 2. Astronomia. I. Tedesco, Daniel Guimarães.
II. Título.

CDD 523.44

**Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária
Gabriela Leite Ferreira -- CRB 7/RJ – 5521**

© 2025 FERP Todos os direitos desta edição reservados à Editora FERP Disponível
também em: <http://www.ugb.edu.b>

FICHA TÉCNICA:

Autores:

Dr. Anderson de Oliveira Ribeiro

Dr. Daniel Guimarães Tedesco

CENTRO UNIVERSITÁRIO GERALDO DI BIASE (UGB)

Reitor Dr. Francisco José Barcellos Sampaio

Pró-Reitor de Assuntos Acadêmicos Elisa Ferreira Silva de Alcantara

Pró-Reitor de Pós-Graduação, Pesquisa e Extensão Dr. Francisco José Barcellos Sampaio

Pró-Reitor Administrativo Dr. Paulo Rogério Di Biase

Agradecimentos

Daniel Guimarães Tedesco agradece à esposa, Grezielle, e à filha, Sara, pela presença constante e pelo apoio incondicional ao longo desta trajetória. Registra, também, sua gratidão ao Centro Universitário Internacional UNINTER e à Fundação Wilson Picler pelo suporte institucional que viabilizou a realização deste livro. Anderson de Oliveira Ribeiro agradece ao professor doutor Fernando V. Roig pela dedicação ao longo de muitos anos, bem como ao doutor Roberto Vieira Martins e à doutora Daniela Lazzaro por todas as contribuições oferecidas. Ambos os autores agradecem, ainda, ao Centro Universitário Geraldo Di Biase pelo apoio e incentivo.

Prefácio

Nada é tão fascinante quanto os objetos do céu, e poucas coisas causam tanta curiosidade quanto a possibilidade de um encontro desses objetos com a Terra. Desde o começo da humanidade a busca pelo entendimento dos objetos do céu é parte da rotina da sociedade, entre outros motivos, para entender como sua vida seria modificada por estes eventos. Com o tempo e a evolução das diferentes ciências, foi ainda mais importante entender o risco do impactos de tais objetos, haja visto a ocorrência de eventos catastróficos para certas categorias da classificação de Linnaeus.

Além da mera curiosidade, que sempre foi relevante para nós, o acesso ao desconhecido foi permitido pelas evoluções técnicas típicas da evolução histórica e, para o caso presente, em especial a ocorrida na Europa do séc. XVII. Com o advento dos telescópios, o fascínio artístico e conceitual do céu deu origem a sua descrição precisa e quantitativa, e o acúmulo de dados abriu margem à descrição matemática. Desta última, dois ramos distintos são possíveis sendas a serem caminhadas. Uma é a descrição exata, analítica, e tão precisa quanto se queira, outra é a solução numérica, aproximada, e tão precisa quanto se possa. A evolução matemática

dos séculos, e até hoje, percorre esses dois caminhos, como será explorado no presente livro. Nele é possível evidenciar a complexidade que é o entendimento sobre o tema em questão, já que tanto o caráter analítico quanto o numérico são explorados, ao se revelar os desafios no estudo da estabilidade dos astros.

Levantamentos de dados recentes, como o James Webb Telescope, têm posto à prova nossas certezas acerca da astrometria e posição do céu. Isto porque as dezenas de países, centenas de milhões de dólares, e milhares de pessoas, envolvidas durante o processo, se apoiaram na solidez dos cálculos para a determinação da posição deste telescópio: um ponto de equilíbrio de Lagrange. E no presente livro são reveladas as particularidades deste estudo matemático. Diversos outros estudos são realizados, discussões sobre temas atuais e relevantes são apresentadas, bem como avaliados casos reais de asteroides e possíveis impactos com a Terra. Os autores tiveram o trabalho minucioso de combinar a análise estrutural, do ambiente astronômico em questão, com o desenvolvimento matemático, pertinente para seu entendimento. Com isto, as próximas páginas não apenas permitem o acesso ao como tais fenômenos acontecem mas também, de certa maneira, ao porquê.

Dr. Rodrigo de Sousa Gonçalves

Professor da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ)

Rio de Janeiro, novembro de 2025

Considerações Iniciais



Sistema Solar contém inúmeros objetos menores, e suas trajetórias as vezes nossas assustam e cruzam a nossa. Logo, esse livro surge para discutir como determinar *quais*, *quando* e com *qual probabilidade* esses cruzamentos podem se tornar eventos de impacto. O interesse no assunto deixa de ser puramente acadêmico quando o alvo é a defesa planetária.

O texto segue na lógica do problema: Começamos com o Problema de Dois Corpos, um modelo que tem solução mas é fisicamente incompleto, útil como primeiro referencial. Na verdade, precisamos mesmo é ir em frente para enfrentar o movimento de mais corpos, que chamamos do Problema de N-Corpos, onde as perturbações gravitacionais são a regra e as soluções analíticas são a exceção.

Definido como os corpos deveriam se mover, passamos ao desafio central: o *problema inverso*. Ou seja, como obter uma trajetória completa a partir de poucos (e péssimos) pontos, medidos de uma plataforma de observação que insiste em girar e orbitar o Sol. Para isso, vamos falar sobre os métodos clássicos de Gauss e Laplace, que primeiro tentaram sistematizar essa inferência.

Esses métodos clássicos fornecem um palpite inicial. O trabalho moderno está no *refinamento*, um quase “lapidar”, em um processo de correção diferencial que força o modelo dinâmico a se ajustar a todas as observações disponíveis usando o Método dos Mínimos Quadrados. O resultado deste processo não é a órbita verdadeira, mas sim uma *órbita nominal* acompanhada de sua *matriz de covariância*.

Esta matriz de incerteza é, *talvez*, mais importante que a própria órbita, pois é ela que nos ajuda a quantificar o tamanho da nossa ignorância e é a entrada direta para a análise de risco, permitindo mapear a região de confiança e calcular probabilidades de impacto.

Para demonstrar como essa cadeia de ferramentas funciona sob pressão, ao final nós trazemos o caso do (99942) Apophis. Sua descoberta, o alarme inicial de 2004, a identificação dos *keyholes* e a eventual resolução da ameaça ilustram por que a medição precisa de efeitos subtis, como o Yarkovsky, é fundamental. O livro é, portanto, um percurso da física idealizada à gestão estatística do risco orbital.

Dr. Anderson de Oliveira Ribeiro

Coordenador do Programa de Pós-graduação e Pesquisa da PROPPEX (UGB-FERP)

Dr. Daniel Guimarães Tedesco

Professor da Escola de Educação, Humanidades e Línguas (ESEHL)

e do Programa de Pós Graduação em Educação e Novas Tecnologias (PPGENT)

no Centro Universitário Internacional (UNINTER)

Sumário

Prefácio	iii
Considerações Iniciais	v
1 Pequenos Corpos e o Problema da Determinação Orbital	1
1.1 Sistema Solar e seus componentes	2
1.2 Terceira Lei de Kepler	3
1.3 Planeta Perdido? Titius-Bode e a Descoberta de Ceres	5
1.4 Cinturão Principal	7
1.5 Definições atuais da IAU	9
1.6 Corpos Menores no Sistema Solar	10
1.7 Magnitude, Albedo e Tamanho	12
1.8 Estrutura Dinâmica do Cinturão Principal	15
1.9 Objetos Próximos à Terra (NEOs)	18
2 Formação do Sistema Solar	24
2.1 Colapso e Formação do Disco	25

2.2	Disco Protoplanetário	28
2.3	Modelo de Safronov	29
2.4	Evidências Observacionais do Modelo Nebular	32
3	Descrição da Órbita Planetária	35
3.1	Solução da Equação do Movimento: Seções Cônicas	37
3.2	Elementos Orbitais	44
3.3	Posição no Tempo: Anomalias e a Equação de Kepler	50
4	Dinâmica do Sistema Solar	57
4.1	Formulação do Problema de N-Corpos	58
4.2	Três corpos já é demais!	61
4.3	Abordagem via Teoria de Perturbações	65
4.4	Problema Restrito de Três Corpos	69
4.5	Pontos de Equilíbrio de Lagrange	75
5	Determinação de Órbita e Avaliação de Risco	83
5.1	Da Observação à Órbita	84
5.2	Da Órbita Preliminar ao Refinamento por Mínimos Quadrados . . .	87
5.3	Análise de Risco de Impacto: Da Incerteza à Probabilidade	90
6	Formalismo Matemático da Determinação de Órbitas	94
6.1	Modelando Matematicamente	95
6.2	Método dos Mínimos Quadrados	99
6.3	Problema da Órbita Preliminar	104

7	Método de Laplace	107
7.1	Geometria e Cinemática da Observação	108
7.2	Equação de Laplace	112
7.3	Segunda Equação: Geometria e a Lei dos Cossenos	119
7.4	Obtenção do Polinômio de Oitavo Grau	120
7.5	Quantidades Observáveis a partir de Três Observações Discretas	122
7.6	Recuperação do Vetor de Estado	126
7.7	Multiplicidade de Soluções: Teoria de Charlier	128
7.8	Limitações do Método	132
8	Método de Gauss	134
8.1	Coplanaridade Orbital	135
8.2	Coeficientes de Lagrange e Propagação Orbital	137
8.3	Equações de Distância Topocêntrica	143
8.4	Equação Dinâmica do Método de Gauss	147
8.5	Comparação entre os Métodos de Gauss e Laplace	149
9	Refinamento Orbital e Análise de Confiança	151
9.1	Método dos Mínimos Quadrados Não-Linear	152
9.2	Elipsoide de Confiança	158
9.3	Processo de Obtenção de uma Órbita Definitiva	160
10	Avaliação de Risco de Impacto	163
10.1	Encontros Próximos e o Plano Alvo	164
10.2	Mapeamento da Incerteza Orbital no Plano Alvo	166
10.3	Métodos Não-Lineares	168

10.4 Sistemas de Monitoramento Operacional	172
11 Caso (99942) Apophis	173
11.1 Descoberta e Alarme Inicial	174
11.2 Refinamento Orbital e Eliminação do Risco de 2029	177
11.3 Avaliação de Riscos Futuros: 2036 e Além	178
11.4 Enfim Apophis	182
Referências	186
Índice Remissivo	190

Capítulo 1

Pequenos Corpos e o Problema da Determinação Orbital

Astronomia moderna fundamenta-se na análise quantitativa dos fenômenos celestes, uma abordagem que se distingue da tradicional observação visual, atualmente limitada pela poluição luminosa. Os princípios físicos e os métodos matemáticos que regem o cosmos, no entanto, permanecem acessíveis por meio do estudo sistemático. Este capítulo introdutório apresenta o contexto histórico e a base física para o problema central deste trabalho: a determinação de órbitas de corpos menores do Sistema Solar e a avaliação de risco de impacto com a Terra. A análise foca-se em asteroides, embora a metodologia seja extensível a cometas e outros objetos

1.1 Sistema Solar e seus componentes

O Sistema Solar¹ compreende o Sol e os corpos celestes gravitacionalmente ligados a ele. Além dos oito planetas e seus satélites, o sistema inclui uma vasta população de corpos menores: planetas anões (como Plutão, Eris e Ceres), asteroides, cometas, meteoroides e poeira interplanetária.



Figura 1.1: O cometa C/2006 P1 (McNaught), fotografado em 23 de janeiro de 2007. Cometas são corpos menores ricos em gelo, cuja sublimação ao se aproximar do Sol gera a coma e as caudas visíveis. (Fonte: NASA/Sebastian Deiries/ESO)

O estudo desses objetos define a Ciência Planetária, uma disciplina que integra Astronomia, Astrofísica e Geociências. Os corpos menores são de particular

¹O primeiro uso registrado do termo *Sistema Solar* data de 1704 (Merriam-Webster, 2008).

interesse por serem considerados remanescentes da formação do Sistema Solar, ocorrida há aproximadamente 4,6 Gyr. Sua composição e distribuição espacial fornecem informações sobre as condições e a evolução do disco protoplanetário original.

O estudo formal dos corpos menores tem um início difuso. Cometas, por suas aparições notáveis, foram registrados por diversas culturas ao longo da história (Figura 1.1). Os registros astronômicos chineses (c. 1100 a.C. a 1700 d.C.) são especialmente detalhados, documentando cometas, meteoros e outros fenômenos (?). Contribuições significativas também vieram de observadores coreanos e japoneses. Embora registros mesoamericanos análogos provavelmente existissem, a maior parte foi perdida.

A transição para o estudo moderno ocorreu com a aplicação da mecânica newtoniana. Edmond Halley, ao analisar registros históricos sob a ótica da teoria da gravitação de Newton, previu o retorno do cometa que hoje leva seu nome. Essa previsão demonstrou que tais objetos são membros do Sistema Solar, governados pelas mesmas leis físicas que os planetas.

1.2 Terceira Lei de Kepler

As leis empíricas de Kepler são consequências diretas da dinâmica Newtoniana. A Terceira Lei, que relaciona o período orbital (T) ao semi-eixo maior (a), é particularmente fundamental para a determinação de órbitas. Sua derivação pode ser ilustrada a partir do caso simplificado de uma órbita circular ($r = a$), onde a força gravitacional (F_g) provê a força centrípeta (F_c) necessária para manter o corpo em movimento.

A igualdade entre as forças, $F_g = F_c$, estabelece a relação

$$G \frac{(M + m)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1.1)$$

sendo M e m as massas dos corpos, G é a constante gravitacional e v é a velocidade orbital. Simplificando a expressão, obtém-se a velocidade orbital em função do raio

$$v = \sqrt{\frac{G(M + m)}{r}} \quad (1.2)$$

A velocidade pode também ser expressa como a razão entre a circunferência da órbita ($2\pi r$) e o período orbital (T). Ao substituir $v = 2\pi r/T$ na Equação (1.2) e reorganizar os termos para isolar T^2 , chega-se à forma newtoniana da Terceira Lei de Kepler para órbitas

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G(M + m)}{r} \implies T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G(M + m)} \right) r^3 \quad (1.3)$$

Embora derivada aqui para o caso circular, uma dedução formal para órbitas elípticas, que considera a conservação de energia e momento angular, demonstra que o raio r é substituído pelo semi-eixo maior a

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G(M + m)} \right) a^3 \quad (1.4)$$

Para a maioria dos casos no Sistema Solar, a massa do corpo orbitante (m) é desprezível em comparação com a massa do corpo central (M), permitindo a aproximação $M + m \approx M$. Isso simplifica a lei para

$$T^2 \approx \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \quad (1.5)$$

Esta relação é instrumental, pois permite determinar o semi-eixo maior da órbita a partir do período orbital, uma grandeza diretamente observável. Ao adotar unidades de anos para T e Unidades Astronômicas (UA) para a no movimento em torno do Sol ($M = M_{\odot}$), a constante de proporcionalidade $4\pi^2/(GM_{\odot})$ torna-se numericamente igual a 1, resultando na conhecida forma $T^2 = a^3$.

1.3 Planeta Perdido? Titius-Bode e a Descoberta de Ceres

A descoberta do primeiro asteroide, Ceres, foi motivada não pela aplicação direta da física newtoniana, mas por uma regularidade numérica empírica conhecida como **relação de Titius-Bode**.

A existência de uma lacuna orbital entre Marte e Júpiter já havia sido notada por Kepler no século XVI. No século XVIII, essa observação ganhou um caráter preditivo quando Johann Titius formulou uma sequência numérica que descrevia as distâncias dos planetas ao Sol. A relação, popularizada por Johann Bode, previa o semi-eixo maior a_n (em UA) do n -ésimo planeta através da fórmula:

$$a_n = 0.4 + (0.3 \times k_n) \quad (1.6)$$

onde k_n segue a sequência 0, 1, 2, 4, 8, ... (com $k_1 = 0$ e $k_n = 2^{n-2}$ para $n \geq 2$). A descoberta de Urano por William Herschel em 1781, cujo semi-eixo maior se alinhava à previsão da fórmula, conferiu grande credibilidade à regra e intensificou a busca por um corpo celeste na posição vaga de $n = 5$.

A Tabela 1.1 compara as previsões da relação com os valores observados para os planetas conhecidos à época, evidenciando a lacuna que motivou a busca por Ceres.

Tabela 1.1: Comparação entre os semi-eixos maiores preditos pela relação de Titius-Bode e os valores observados (ca. 1800).

Planeta (n)	k_n	a_n Predito [UA]	Observado [UA]	Desvio
Mercúrio (1)	0	0,40	0,39	2,6
Vênus (2)	1	0,70	0,72	-2,8
Terra (3)	2	1,00	1,00	0,0
Marte (4)	4	1,60	1,52	5,3
Lacuna (5)	8	2,80	?	?
Júpiter (6)	16	5,20	5,20	0,0
Saturno (7)	32	10,00	9,58	4,4
Urano (8)	64	19,60	19,22	2,0

Nota: O desvio é $(a_{\text{predito}} - a_{\text{obs}})/a_{\text{obs}}$.

A lacuna na posição $n = 5$ da relação de Titius-Bode, que previa um corpo a $\approx 2,8$ UA, motivou um grupo de astrônomos (*Policiais Celestiais*) a organizar uma busca sistemática.

Nesse contexto, em 1° de janeiro de 1801, Giuseppe Piazzi observou um objeto não catalogado na constelação de Touro (?). O movimento do objeto em relação às estrelas de fundo, detectado em noites subsequentes, indicou que se tratava de um corpo do Sistema Solar. Piazzi o nomeou *Ceres Ferdinandea* e realizou

24 observações ao longo de 41 dias, até que a proximidade angular com o Sol impediu novas medições.

O arco observacional resultante era curto, e os métodos de cálculo de órbita existentes eram inadequados para determinar uma trajetória elíptica a partir de dados tão limitados. Isso gerou a possibilidade de o objeto não ser reencontrado.

O problema foi abordado por Carl Friedrich Gauss, que desenvolveu um novo método matemático para determinação orbital (detalhado no Capítulo 8). Utilizando as 24 observações de Piazzi com seu Método dos Mínimos Quadrados, Gauss publicou em setembro de 1801 as efemérides para a posição futura de Ceres.

Com base nesses cálculos, Franz von Zach e Heinrich Olbers recuperaram o objeto em 31 de dezembro de 1801 e 1° de janeiro de 1802, respectivamente. A órbita determinada por Gauss apresentou um semi-eixo maior de $a \approx 2,77$ UA, consistente com a posição prevista pela relação de Titius-Bode.

1.4 Cinturão Principal

A conformidade da órbita de Ceres com a relação de Titius-Bode foi posta em questão com a descoberta de um segundo objeto na mesma região orbital. Em março de 1802, Heinrich Olbers identificou 2 Pallas. Seguiram-se as descobertas de 3 Juno em 1804 por Karl Harding e de 4 Vesta em 1807, novamente por Olbers (Figura 1.2).

Essas observações indicaram a existência não de um único planeta, mas de uma população de corpos menores entre Marte e Júpiter. Olbers levantou a hipótese de que seriam fragmentos de um planeta que se desintegrou, uma ideia



Figura 1.2: Comparação de tamanho dos quatro primeiros asteroides (Ceres, Pallas, Juno, Vesta) com a Lua. A figura mostra suas formas irregulares. (Fontes: NASA/JPL-Caltech/UCLA/MPS/DLR/IDA; ESO/Vernazza et al.)

hoje descartada. William Herschel cunhou o termo *asteroide* para descrever a aparência pontual desses objetos em telescópios, que os diferenciava dos discos planetários.

As descobertas estabeleceram a existência do **Cinturão Principal de Asteróides**, a região entre aproximadamente 2,1 e 3,3 UA onde se concentra a maioria dos asteroides. Posteriormente, a descoberta de Netuno em 1846, cuja órbita ($a \approx 30,1$ UA) não correspondia à predição de Titius-Bode para $n = 9$ ($a_9 \approx 38,8$ UA), demonstrou que a relação era uma coincidência numérica sem fundamento físico.

A busca pelo corpo previsto pela relação de Titius-Bode, embora baseada em uma premissa incorreta, resultou na identificação de uma nova classe de objetos

do Sistema Solar e estimulou o desenvolvimento de métodos de determinação orbital.

1.5 Definições atuais da IAU

A proliferação de descobertas, que hoje ultrapassa meio milhão de asteroides catalogados, e a subsequente descoberta de objetos transnetunianos de tamanho comparável ao de Plutão, forçaram a comunidade astronômica a redefinir formalmente o termo *planeta*. Sendo assim, a União Astronômica Internacional (IAU), em sua XXVI Assembleia Geral realizada em 2006, estabeleceu as definições formais:

1. **Planeta:** É um corpo celeste que (a) orbita o Sol, (b) possui massa suficiente para que sua autogravidade supere as forças de corpo rígido, atingindo um estado de equilíbrio hidrostático (forma aproximadamente esférica/elipsoidal), e (c) tornou-se o corpo gravitacionalmente dominante em sua vizinhança orbital (limpou sua órbita de outros corpos).
2. **Planeta Anão:** É um corpo celeste que (a) orbita o Sol, (b) possui massa suficiente para atingir o equilíbrio hidrostático, (c) não limpou a vizinhança de sua órbita, e (d) não é um satélite natural².

Todos os demais objetos que orbitam o Sol, com exceção dos satélites, foram coletivamente denominados **Pequenos Corpos do Sistema Solar** (Small Solar System Bodies - SSSB), uma categoria que inclui a maioria dos asteroides e cometas. Sob esta nova definição, Ceres foi reclassificado como planeta anão, juntamente com Plutão, Eris, Haumea e Makemake.

²Um satélite natural ou lua (em letra minúscula) é um corpo celeste que orbita um planeta, um planeta anão ou um dos pequenos corpos do Sistema Solar.

1.6 Corpos Menores no Sistema Solar

O Sistema Solar é constituído predominantemente pela massa do Sol, seguido pelos oito planetas clássicos. No entanto, ele também abriga uma grande e heterogênea população de **corpos menores**. Esta categoria engloba todos os objetos que orbitam o Sol e que não são classificados como planetas, planetas anões ou satélites naturais destes.

Estes corpos são de interesse científico primordial, pois representam os blocos construtores remanescentes do processo de formação planetária, ocorrido há aproximadamente 4,5 Gyr. Eles funcionam como um registro fóssil das condições físicas e químicas do disco protoplanetário primordial, oferecendo informações sobre a origem e evolução do nosso sistema.

A população de corpos menores exhibe uma ampla gama de tamanhos, desde partículas de poeira micrométricas até objetos com centenas de quilômetros de diâmetro, como o planeta anão (1) Ceres, que anteriormente era classificado como o maior asteroide. Objetos menores que ≈ 500 km de diâmetro geralmente não possuem gravidade suficiente para superar a rigidez de seus materiais constituintes e atingir o equilíbrio hidrostático. Consequentemente, muitos apresentam formas irregulares.

1.6.1 Distinção entre Asteroides e Cometas

Uma distinção entre os corpos menores baseia-se em sua composição e atividade observacional:

- **Cometas:** São caracterizados por uma composição rica em materiais **voláteis**, principalmente gelos (H_2O , CO_2 , CO , CH_4 , NH_3 , etc.), misturados

com poeira de silicatos e compostos orgânicos complexos. Seus núcleos são frequentemente descritos como bolas de neve sujas. Quando suas órbitas os conduzem ao Sistema Solar interior (tipicamente a distâncias heliocêntricas $r \lesssim 3$ UA), o aumento da radiação solar provoca a **sublimação** dos gelos superficiais. Os gases liberados arrastam consigo partículas de poeira, formando uma atmosfera tênue e transiente chamada **coma**. A pressão da radiação solar e a interação com o vento solar podem então empurrar esses materiais para longe do núcleo, formando as distintas **caudas** de gás (íons) e poeira. A presença desta atividade (coma e/ou cauda) é a marca definidora de um cometa ativo.

- **Asteroides:** São corpos predominantemente rochosos ou metálicos, compostos por materiais **refratários** (com altos pontos de fusão/sublimação), como silicatos, óxidos metálicos e metais (principalmente Ferro e Níquel). Em geral, asteroides são incapazes de exibir a atividade cometária, seja porque se formaram em regiões mais quentes do disco protoplanetário onde os voláteis não puderam condensar, ou porque perderam seus voláteis primordiais devido ao aquecimento solar ou processos colisionais ao longo da história do Sistema Solar. A fronteira entre asteroides e cometas, no entanto, não é totalmente nítida, com a descoberta de cometas do cinturão principal e asteroides ativos que exibem atividade tênue.

1.6.2 Distribuição Espacial e o Cinturão Principal

Atualmente, mais de um milhão de corpos menores são conhecidos e catalogados. Embora distribuídos por todo o Sistema Solar, a grande maioria dos asteroides

conhecidos, aproximadamente 78% do total catalogado, está em uma região específica entre as órbitas de Marte e Júpiter. Esta região, conhecida como o **Cinturão Principal de Asteroides**, estende-se aproximadamente de 2,0 UA a 3,2 UA do Sol.

A existência e estrutura do Cinturão Principal são fortemente influenciadas pela presença massiva de Júpiter. Sua gravidade impediu que o material nesta região se aglutinasse para formar um planeta de tamanho considerável e esculpiu a distribuição dos asteroides através de perturbações e ressonâncias orbitais. A proximidade desta região à linha de gelo primordial, detalhada no Capítulo 2, também contribui para a diversidade composicional observada nos asteroides do cinturão.

1.7 Magnitude, Albedo e Tamanho

A caracterização física dos corpos menores depende primariamente da análise da luz solar que eles refletem ou da radiação térmica que emitem.

1.7.1 Magnitude Absoluta (H)

O brilho aparente de um asteroide (m) varia enormemente com sua distância ao Sol (r) e ao observador (Δ), bem como com o ângulo de fase α (o ângulo Sol-asteroide-observador). Para comparar o brilho intrínseco de diferentes objetos, utiliza-se a **magnitude absoluta (H)**.

H é definida como a magnitude visual aparente que o objeto teria se estivesse localizado hipoteticamente a uma distância de 1 UA do Sol e 1 UA do observador, e visto em ângulo de fase zero ($\alpha = 0^\circ$). Esta configuração geométrica maximiza o brilho observado. A magnitude absoluta é calculada a partir de múltiplas

observações de magnitude aparente m em diferentes geometrias, usando uma relação fotométrica que modela o efeito da distância e do ângulo de fase.

É importante entender que H é uma medida de **brilho intrínseco**, não de tamanho. Um objeto pequeno e muito reflexivo pode ter o mesmo H que um objeto grande e escuro.

1.7.2 Albedo Geométrico (p_V)

O , tipicamente medido na banda V e p_V , quantifica a refletividade de uma superfície. É definido como a razão entre o brilho do objeto observado em ângulo de fase zero e o brilho de um disco plano perfeitamente refletor do mesmo tamanho, localizado à mesma distância e orientado perpendicularmente à linha de visada. Valores de p_V variam de ≈ 0.02 para superfícies muito escuras (como asfalto ou asteroides carbonáceos primitivos) até ≈ 0.9 para superfícies muito brilhantes (como neve fresca).

1.7.3 Relação Diâmetro-Magnitude-Albedo

Assumindo esfericidade, a relação física que conecta o diâmetro D de um asteroide à sua magnitude absoluta H e ao seu p_V pode ser encontrada a partir de princípios fotométricos.

O fluxo de luz F recebido de um objeto é proporcional à intensidade I da fonte (Sol), à área da seção transversal A do objeto que reflete a luz, ao albedo p_V e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias r^2 (Sol-objeto) e Δ^2

(objeto-observador). Para a geometria de definição de H ($r = 1 \text{ UA}$, $\Delta = 1 \text{ UA}$, $\alpha = 0^\circ$), o fluxo F_H é:

$$F_H \propto \frac{I_\odot}{(1 \text{ UA})^2} \cdot p_V \cdot A \cdot \frac{1}{(1 \text{ UA})^2} \quad (1.7)$$

A área da seção transversal é $A = \pi(D/2)^2$. Assim, $F_H \propto p_V D^2$. A escala de magnitude é logarítmica: $H = -2.5 \log_{10}(F_H) + K$, onde K é uma constante de calibração.

$$H = -2.5 \log_{10}(k' p_V D^2) + K \quad (k' \text{ é uma constante de proporcionalidade})$$

$$H = -2.5 \log_{10}(p_V) - 2.5 \log_{10}(D^2) + K' \quad (\text{absorvendo } k' \text{ em } K')$$

$$H = -2.5 \log_{10}(p_V) - 5 \log_{10}(D) + K' \quad (1.8)$$

Isolando $\log_{10}(D)$:

$$5 \log_{10}(D) = K' - H - 2.5 \log_{10}(p_V)$$

$$\log_{10}(D) = \log_{10} \left(\frac{10^{K'/5}}{\sqrt{p_V}} \right) - 0.2H \quad (1.9)$$

chegando a expressão

$$D = \left(\frac{10^{K'/5}}{\sqrt{p_V}} \right) 10^{-0.2H} \quad (1.10)$$

A constante de calibração $C_0 = 10^{K'/5}$ é determinada empiricamente comparando com objetos de tamanho conhecido (ou usando a magnitude absoluta do Sol). Seu valor aceito, para D em quilômetros, é $C_0 = 1329$ km. Portanto, a relação final é:

$$D \text{ (km)} = \frac{1329 \text{ km}}{\sqrt{p_V}} 10^{-H/5} \quad (1.11)$$

Esta equação é importante para estimar o tamanho de asteroides a partir de seu brilho H , mas requer o conhecimento do albedo p_V . A incerteza no diâmetro é dominada pela incerteza no albedo, que pode variar significativamente entre diferentes classes taxonômicas de asteroides (e.g., $p_V \sim 0.04$ para tipo C, $p_V \sim 0.25$ para tipo S).

1.8 Estrutura Dinâmica do Cinturão Principal

A distribuição dos asteroides no Cinturão Principal não é uniforme. Observações acumuladas ao longo de décadas revelaram uma estrutura complexa, com lacunas e agrupamentos (ver Figura 1.3). Esta estrutura é um resultado direto das interações gravitacionais com os planetas, especialmente Júpiter.

1.8.1 Ressonâncias de Movimento Médio (MMRs)

Uma **ressonância de movimento médio (MMR)** ocorre quando o período orbital T_A de um asteroide e o período orbital T_J de Júpiter (ou outro planeta) estão em uma razão de inteiros pequenos, $p : q$. Isso significa que o movimento médio $n = 2\pi/T$ satisfaz a relação $p \cdot n_A \approx q \cdot n_J$.

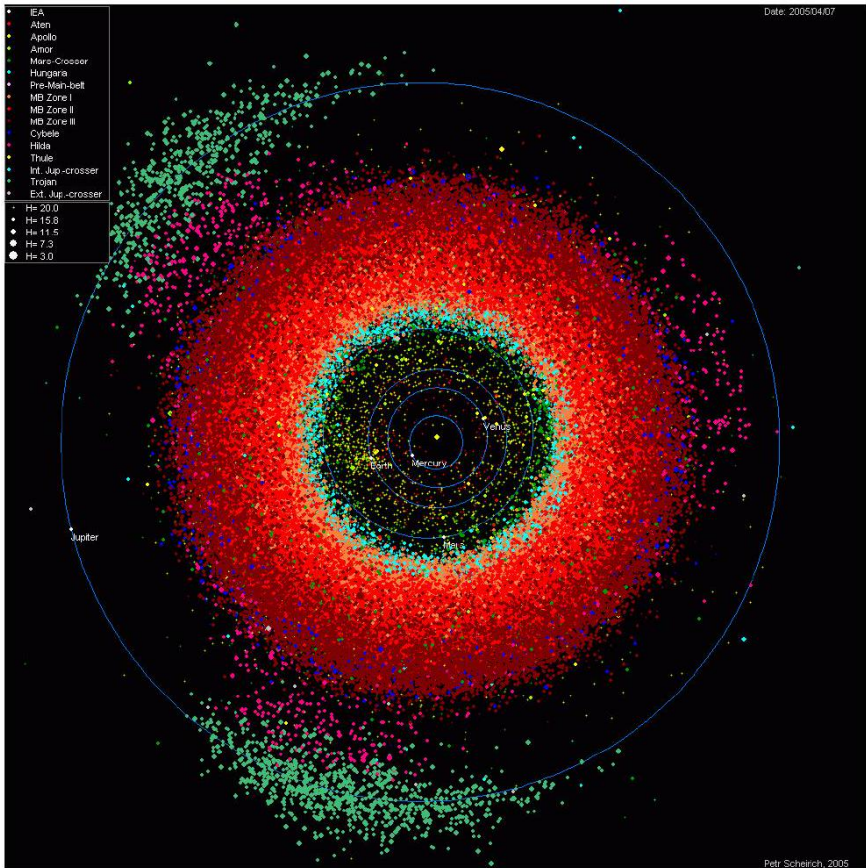


Figura 1.3: Distribuição dos asteroides conhecidos (em 2018) no plano semieixo maior (a) versus magnitude absoluta (H). O Cinturão Principal domina a região entre ≈ 2.1 e 3.3 UA. As lacunas de Kirkwood (zonas de instabilidade devido a ressonâncias com Júpiter) são visíveis como faixas verticais de baixa densidade. Grupos dinâmicos estáveis, como os Troianos (verde, $a \approx 5,2$ UA) e os Hildas (rosa, $a \approx 4,0$ UA), formam concentrações distintas.

Nestas regiões ressonantes, as perturbações gravitacionais de Júpiter sobre o asteroide se acumulam coerentemente ao longo do tempo, podendo levar a aumentos na excentricidade e inclinação do asteroide, eventualmente ejetando-o daquela região. Isso explica as **Lacunas de Kirkwood**, faixas de baixa densidade no Cinturão Principal correspondentes a MMRs instáveis com Júpiter (e.g., 3:1, 5:2, 7:3, 2:1).

Por outro lado, algumas MMRs podem ser regiões de estabilidade dinâmica, onde os asteroides ficam *presos*.

1.8.2 Grupos Dinâmicos

A Figura 1.3 destaca dois grupos dinâmicos importantes fora do cinturão principal clássico, definidos por MMRs estáveis:

- **Troianos de Júpiter:** (Nuvens verdes em $a \approx 5,2$ UA) Estes asteroides ocupam a **ressonância 1:1** com Júpiter, o que significa que eles compartilham o mesmo período orbital (e semi-eixo maior) que Júpiter. Eles não colidem com Júpiter porque estão agrupados em torno dos **pontos de Lagrange L4 e L5** do sistema Sol-Júpiter. Estes são pontos de equilíbrio estável localizados 60° à frente (L4) e 60° atrás (L5) de Júpiter em sua órbita (ver Capítulo ??). Os Troianos libracionam (oscilam) em torno desses pontos.
- **Grupo Hilda:** (Agrupamentos rosa em $a \approx 3,97$ UA) Estes asteroides estão presos na **ressonância 3:2** com Júpiter. Para cada 2 órbitas de Júpiter, um asteroide Hilda completa exatamente 3 órbitas. Esta ressonância, embora localizada perto da borda externa instável do Cinturão Principal, fornece um nicho de estabilidade dinâmica de longo prazo. Os Hildas formam uma

estrutura triangular dinâmica que evita encontros muito próximos com Júpiter.

A existência e as propriedades destes grupos dinâmicos fornecem restrições importantes sobre os modelos de formação e migração planetária no início da história do Sistema Solar.

1.9 Objetos Próximos à Terra (NEOs)

Dentre as diversas populações de corpos menores do Sistema Solar, uma classe de particular interesse, tanto científico quanto prático, é a dos **Objetos Próximos à Terra** (NEOs, do inglês *Near-Earth Objects*). Estes são asteroides e cometas cujas órbitas os trazem para a vizinhança orbital da Terra.

1.9.1 Definição e Relevância

Formalmente, um corpo menor é classificado como NEO se sua trajetória orbital satisfaz a condição de que sua distância de periélio seja $q < 1,3$ UA. Este limite, 1,3 UA, é escolhido por convenção e engloba objetos que podem cruzar ou se aproximar significativamente da órbita terrestre. Os NEOs são relevantes por várias razões:

1. **Risco de Impacto:** Por definição, suas órbitas podem interceptar ou passar perto da órbita da Terra, representando um risco potencial de colisão. O monitoramento e a caracterização dos NEOs são a base da defesa planetária.

2. **Acessibilidade:** Suas órbitas os tornam os corpos menores mais acessíveis para missões espaciais, tanto robóticas quanto, potencialmente, humanas, oferecendo alvos para exploração e estudo *in situ*.
3. **Origem e Evolução:** Os NEOs são uma população dinamicamente jovem, com vidas médias orbitais na região próxima à Terra da ordem de milhões de anos. Eles são continuamente reabastecidos a partir de reservatórios mais distantes (principalmente o Cinturão Principal de Asteroides e o Cinturão de Kuiper/Nuvem de Oort para os cometas) através de processos de perturbação gravitacional e efeitos não-gravitacionais. O estudo dos NEOs informa sobre esses mecanismos de transporte dinâmico.

O grupo de NEOs inclui tanto **Cometas Próximos à Terra (NECs)** quanto **Asteroides Próximos à Terra (NEAs)**. Embora os NECs representem um risco, como evidenciado pelo evento de Tunguska em 1908, possivelmente causado por um fragmento cometário, os NEAs são numericamente dominantes e constituem o foco principal dos programas de busca e monitoramento.

1.9.2 Classificação Dinâmica dos NEAs

Os NEAs são subdivididos em quatro classes dinâmicas, com base em seus elementos orbitais em relação à órbita da Terra. Para entender a classificação, recordamos os parâmetros orbitais:

- a : semieixo maior (tamanho médio da órbita).
- e : excentricidade (forma da órbita).
- $q = a(1 - e)$: distância de periélio (menor distância ao Sol).

- $Q = a(1 + e)$: distância de (maior distância ao Sol).

As fronteiras da classificação utilizam os limites da órbita terrestre. A Terra possui $a_{\oplus} \approx 1,000$ UA e uma pequena excentricidade $e_{\oplus} \approx 0.0167$. As distâncias extremas da Terra ao Sol são:

$$q_{\oplus} = a_{\oplus}(1 - e_{\oplus}) \approx 1,000 \text{ UA}(1 - 0.0167) \approx 0,983 \text{ UA} \quad (1.12)$$

$$Q_{\oplus} = a_{\oplus}(1 + e_{\oplus}) \approx 1,000 \text{ UA}(1 + 0.0167) \approx 1,017 \text{ UA} \quad (1.13)$$

Estes dois valores, 0,983 UA e 1,017 UA, definem a *zona radial* ocupada pela órbita da Terra e servem como referências para a classificação dos NEAs. As quatro classes dinâmicas são (ver Figura 1.4):

1. **Classe Atira (ou Apohele):** Definidos por $a < 1,0$ UA e $Q < 0,983$ UA. Estes asteroides possuem órbitas *inteiramente contidas* dentro da órbita da Terra. Seu Q é menor que o periélio da Terra q_{\oplus} . São objetos difíceis de detectar a partir da Terra, pois aparecem sempre em pequenas elongações angulares em relação ao Sol. Representam a população menos numerosa de NEAs conhecidos.
2. **Classe Aten:** Definidos por $a < 1,0$ UA e $Q > 0,983$ UA. Estes asteroides têm um tamanho orbital médio menor que o da Terra ($a < a_{\oplus}$), mas suas órbitas são suficientemente excêntricas para que seu Q ultrapasse o periélio da Terra q_{\oplus} . Portanto, são asteroides que **cruzam a órbita da Terra** a partir de dentro.
3. **Classe Apollo:** Definidos por $a > 1,0$ UA e $q < 1,017$ UA. Estes asteroides têm um tamanho orbital médio maior que o da Terra ($a > a_{\oplus}$), mas

seus periélios q são menores que o da Terra Q_{\oplus} . Portanto, são asteroides que **cruzam a órbita da Terra** a partir de fora. Esta é uma das classes mais populosas de NEAs.

4. **Classe Amor:** Definidos por $a > 1,0 \text{ UA}$ e $1,017 \text{ UA} < q < 1,3 \text{ UA}$. Estes asteroides têm órbitas inteiramente externas à da Terra ($q > Q_{\oplus}$), mas se aproximam dela, com periélios entre o terrestre e o limite de $1,3 \text{ UA}$. Eles **não cruzam** a órbita da Terra, mas podem ter encontros próximos significativos. A maioria dos NEAs descobertos pertence a esta classe. Marte também possui uma população de asteroides Amor em relação a ele.

1.9.3 Objetos Potencialmente Perigosos (PHAs)

Dentro do grupo dos NEAs, uma subcategoria de particular relevância para a avaliação de risco de longo prazo é a dos **Objetos Potencialmente Perigosos (PHAs)**. Um asteroide (ou cometa de curto período) é classificado como PHA se satisfaz *simultaneamente* dois critérios:

1. **Critério de Proximidade Orbital (MOID):** A Distância Mínima de Interseção Orbital com a Terra deve ser $\text{MOID}_{\oplus} \leq 0,05 \text{ UA}$.
2. **Critério de Tamanho (magnitude absoluta):** A magnitude absoluta deve ser $H \leq 22,0$.

Análise do Critério de MOID: O MOID mede a menor distância geométrica entre as duas elipses orbitais. Um valor $\leq 0,05 \text{ UA}$ ($\approx 7,5$ milhões de km) indica que as órbitas passam muito perto uma da outra. Embora não garanta uma colisão (os

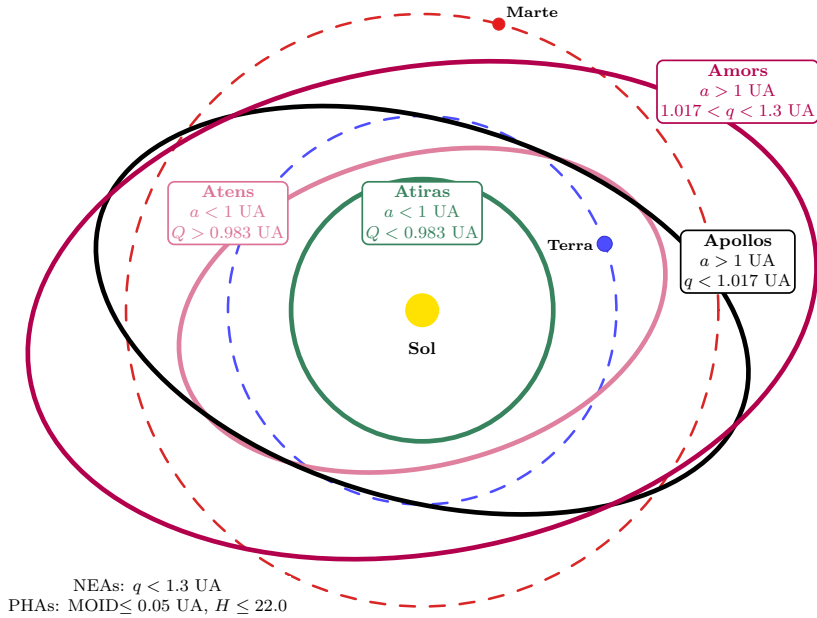


Figura 1.4: Representação esquemática das quatro classes dinâmicas de NEAs em relação à órbita da Terra (círculo tracejado, com $q_{\oplus} \approx 0.983 \text{ UA}$ e $Q_{\oplus} \approx 1.017 \text{ UA}$). Atiras têm $Q < q_{\oplus}$. Atens têm $a < 1$, $Q > q_{\oplus}$. Apollos têm $a > 1$, $q < Q_{\oplus}$. Amors têm $a > 1$, $Q_{\oplus} < q < 1.3 \text{ UA}$.

corpos podem nunca estar no ponto de cruzamento ao mesmo tempo), uma MOID pequena significa que perturbações gravitacionais ao longo do tempo podem alterar ligeiramente as órbitas, potencialmente levando a uma colisão futura. O valor de 0,05 UA é um limiar pragmático para identificar objetos que requerem monitoramento a longo prazo.

Análise do Critério de Magnitude H : O limiar $H \leq 22.0$ serve como um critério de seleção para selecionar objetos grandes o suficiente para causar danos significativos em caso de impacto. Como vimos na Eq. (1.11), o diâmetro D depende de H e do albedo p_V . O valor $H = 22.0$ corresponde a um diâmetro $D \approx 140$ m para um albedo médio ($p_V \approx 0.14$). Objetos deste tamanho ou maiores são capazes de causar devastação em escala regional (e.g., destruir uma área metropolitana) se impactarem a Terra.

Capítulo 2

Formação do Sistema Solar

A investigação sobre a origem do Sistema Solar iniciou-se com modelos mecanicistas. Em 1644, René Descartes postulou que um vórtice de matéria fluida arrastava os planetas em suas órbitas, uma explicação que evitava o conceito de ação à distância. Um modelo alternativo, de natureza catastrófica, foi proposto em 1755 por Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon. Ele sugeriu que a colisão de um cometa com o Sol teria ejetado a matéria que, ao se condensar, formou os planetas.

Uma nova abordagem surgiu em 1765 com a *hipótese nebular* de Immanuel Kant. Utilizando a física newtoniana, Kant propôs que o Sol e os planetas se formaram simultaneamente a partir da contração gravitacional de uma nuvem de matéria.

Essa ideia foi desenvolvida matematicamente por Pierre-Simon Laplace em 1796, que demonstrou que a contração de uma nebulosa em rotação, devido

à **conservação do momento angular**, levaria à formação de um disco achatado. Nesse modelo, o Sol se formaria no centro, enquanto anéis de matéria ejetados do equador do disco se condensariam para originar os planetas. O modelo de Kant-Laplace estabeleceu a base conceitual da teoria moderna de formação planetária.

2.1 Colapso e Formação do Disco

O modelo de formação do Sistema Solar contemporâneo, conhecido como Modelo de Colapso Gravitacional de Nuvem Molecular (CGNM), é uma evolução das ideias de Kant e Laplace, fundamentado em observações e física. O processo unificado de formação estelar e planetária iniciou-se há aproximadamente $4,55 \times 10^9$ anos, com o colapso de um núcleo denso dentro de uma nuvem molecular.

Essas nuvens são compostas primariamente por gás – hidrogênio molecular H_2 e hélio He , com traços de outros compostos – e uma fração de aproximadamente 1% de sua massa em poeira, constituída por grãos de silicatos, carbono e gelos.

2.1.1 Por que a Nuvem Colapsa?

Uma nuvem no espaço interestelar está sujeita a duas forças principais: a auto-gravidade, que tende a contraí-la, e a pressão interna (térmica e, em menor grau, magnética), que tende a expandi-la. O colapso só ocorre se a gravidade superar a pressão. Este é o critério de instabilidade de Jeans. A energia potencial gravitacional E_G de uma nuvem esférica de massa M e raio R é, de forma aproximada:

$$E_G \approx -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (2.1)$$

A energia cinética interna (térmica) E_T da nuvem é a soma da energia cinética de suas N partículas:

$$E_T = N \left(\frac{3}{2} k_B T \right) \quad (2.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. O número de partículas N é a massa total M dividida pela massa média por partícula, μm_p (onde μ é o peso molecular médio e m_p é a massa do próton): $N = M/(\mu m_p)$.

$$E_T = \frac{M}{\mu m_p} \frac{3}{2} k_B T \quad (2.3)$$

O colapso gravitacional ocorre quando a magnitude da energia gravitacional¹ excede a energia térmica, $|E_G| > E_T$

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} > \frac{3}{2} \frac{M k_B T}{\mu m_p} \quad (2.4)$$

Podemos reescrever o raio R em termos da densidade média $\rho = M/(\frac{4}{3}\pi R^3)$, o que nos dá $R = (3M/4\pi\rho)^{1/3}$. Substituindo R na inequação (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} GM^2 \left(\frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{1/3} &> \frac{3}{2} \frac{M k_B T}{\mu m_p} \\ M^{2/3} &> \frac{5}{2} \frac{k_B T}{G \mu m_p} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.5)$$

¹pelo Teorema do Virial, a condição exata é $|E_G| > 2E_T$, mas para uma estimativa de ordem de grandeza, usamos a comparação direta

Elevando ambos os lados à potência $3/2$, isolamos a massa M . A massa mínima para o colapso, conhecida como **Massa de Jeans** (M_J), é:

$$M > M_J \approx \left(\frac{5k_B T}{2G\mu m_p} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Núcleos densos de nuvens moleculares, com $T \approx 10$ K e densidades $\rho \approx 10 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, têm Massas de Jeans da ordem de $1 M_\odot$. Isso explica por que o processo de colapso naturalmente forma estrelas com massas solares.

2.1.2 Por que um Disco?

O colapso de uma nuvem que possui até mesmo uma rotação inicial muito lenta é dominado pela **conservação do momento angular**. O momento angular L de uma nuvem em rotação é $L = I\omega$, onde I é o momento de inércia e ω é a velocidade angular. Para uma esfera, $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Durante o colapso, que é simplesmente a contração do raio R , se L for conservado, ω deve aumentar para compensar a diminuição de R^2

$$\begin{aligned} L_i = L_f &\implies I_i \omega_i = I_f \omega_f \implies \left(\frac{2}{5} M R_i^2 \right) \omega_i = \left(\frac{2}{5} M R_f^2 \right) \omega_f \\ \omega_f &= \omega_i \left(\frac{R_i}{R_f} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esse aumento na rotação gera uma poderosa força centrífuga $F_c = m\omega^2 r_\perp$, sendo r_\perp o raio perpendicular ao eixo de rotação, que se opõe à gravidade F_g .

O colapso é assimétrico:

- **Ao longo do eixo de rotação (polos):** A força centrífuga é nula ($r_{\perp} = 0$). A matéria colapsa livremente, caindo nos polos.
- **Ao longo do plano equatorial:** A força centrífuga é máxima e cresce rapidamente com a contração. Ela eventualmente se iguala à componente radial da gravidade, parando o colapso *apenas* nesse plano.

O resultado inevitável é o achatamento da nuvem em colapso, formando um núcleo denso e quente no centro e um grande disco de gás e poeira em rotação ao seu redor: o **disco protoplanetário**. A matéria do disco, também chamada de nebulosa solar, é o material do qual os planetas e demais corpos se formarão.

2.2 Disco Protoplanetário

O disco protoplanetário não é uniforme. A proto-estrela em seu centro aquece o disco internamente, e processos de atrito viscoso também geram calor. Isso estabelece um forte **gradiente de temperatura**: o disco é muito quente perto do centro e muito frio em suas bordas externas.

Essa variação de temperatura é o fator importante que determina a composição dos planetas. A uma dada distância r do Sol, a temperatura local $T(r)$ permitia que apenas materiais com pontos de fusão/sublimação *acima* de $T(r)$ se condensassem em grãos sólidos.

- **Disco Interno (quente, $T > 1000$ K):** Apenas os materiais mais refratários, como metais (Ferro, Níquel) e silicatos (rochas), podiam existir como sólidos.

- **Disco Externo (frio, $T < 170$ K):** Além dos metais e rochas, os compostos voláteis, especialmente o gelo de água (H_2O), podiam se condensar. Mais longe, gelos de metano (CH_4) e amônia (NH_3) também se solidificavam.

A fronteira mais importante neste disco é a **Linha de Gelo** (ou *Snow Line*), localizada onde a temperatura cai para $T \approx 150$ K a 170 K, permitindo a condensação da água. No Sistema Solar primordial, esta linha estava localizada perto de 2,7 UA, na região do atual Cinturão de Asteróides. Esta linha divide o Sistema Solar em duas zonas de formação:

1. **Zona Interna ($r < r_{\text{gelo}}$):** Pobre em sólidos, contendo apenas $\sim 0.6\%$ da massa total do disco (metais e rochas). Isso levou à formação de planetas pequenos e rochosos: os planetas terrestres (Mercúrio, Vênus, Terra e Marte).
2. **Zona Externa ($r > r_{\text{gelo}}$):** Rica em sólidos. O gelo de H_2O era muito mais abundante que rochas/metais. A maior disponibilidade de material sólido permitiu a formação rápida de núcleos massivos (da ordem de $10 M_{\oplus}$).

2.3 Modelo de Safronov

O estudo teórico da formação planetária a partir do disco teve seu primeiro grande sucesso com o trabalho de Victor ? em sua clássica monografia *Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and the Planets*. O modelo de Safronov, embora refinado, ainda forma a base do nosso entendimento.

As etapas principais (ilustradas na Figura 2.1) são:

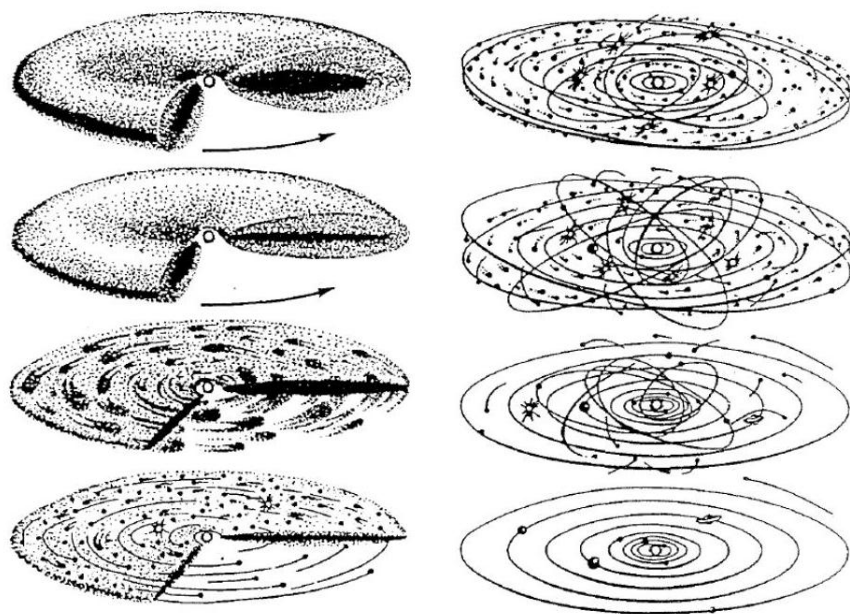


Figura 2.1: Ilustração original do artigo de Safronov, 1969 descrevendo as etapas da formação do Sistema Solar: (1) Contração da nebulosa, formação do disco e corpo central; (2) Achatamento rotacional do disco, criando um sub-disco denso de poeira; (3) Condensação dos grãos e formação de planetesimais por instabilidade gravitacional; (4) Evolução dinâmica e acreção dos planetesimais, enquanto o gás começa a se dissipar; (5-8) Formação dos planetas e maturação do Sistema Solar como o conhecemos.

1. **Sedimentação e Crescimento de Grãos:** Os grãos de poeira (metais, rochas ou gelo, dependendo da localização) colidem e se aglutinam (coagulam). Simultaneamente, eles sedimentam, ou seja, saem do disco de gás (que é espesso) e se concentram em um sub-disco fino e denso no plano central da nebulosa.
2. **Formação de Planetesimais:** A camada de poeira torna-se tão densa que sofre uma *instabilidade gravitacional* própria (similar à Instabilidade de Jeans, mas em um disco rotativo), fragmentando-se diretamente em corpos com ~ 1 km a 10 km de diâmetro. Estes são os **planetesimais**.
3. **Acréscão e Crescimento (Runaway):** Os planetesimais, agora massivos o suficiente, começam a se atrair gravitacionalmente. Os maiores crescem mais rápido, pois sua seção de choque gravitacional (a área efetiva de captura) é muito maior que seu tamanho físico. Isso leva a um crescimento descontrolado dos maiores corpos.
4. **Formação dos Núcleos Planetários:**
 - **Planetas Terrestres:** A acreção de planetesimais rochosos no Sistema Solar interno formou os planetas terrestres. O processo foi mais lento devido à menor quantidade de material sólido.
 - **Planetas Gigantes (acréscão de Núcleo):** Além da Linha de Gelo, os núcleos cresceram muito mais rápido (acrescendo rocha e gelo). Ao atingirem uma massa crítica de $\approx 10 M_{\oplus}$, sua gravidade tornou-se suficiente para capturar o gás hidrogênio e hélio diretamente do disco. Esta captura de gás foi um processo de runaway que formou as atmosferas.

feras massivas de Júpiter e Saturno. Urano e Netuno, mais distantes, capturaram menos gás, tornando-se gigantes de gelo.

5. **Limpeza do Sistema:** A proto-estrela (Sol) evoluiu, aumentando sua temperatura e produzindo ventos estelares (Fase T-Tauri) que varreram o gás e a poeira remanescentes do disco. Isso encerrou a era de formação planetária, deixando para trás os planetas formados.

Os asteroides, como os do Cinturão Principal, são os restos desse processo. São planetesimais (ou fragmentos de planetesimais) que nunca conseguiram se aglutinar para formar um planeta, em grande parte devido à perturbação gravitacional do massivo Júpiter, que *agitou* a região e impediu a *acresção* ordenada.

2.4 Evidências Observacionais do Modelo Nebular

O modelo de colapso de nuvem e formação de disco é corroborado por observações diretas de regiões de formação estelar. Instrumentos como o Telescópio Espacial Hubble (HST) e o Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) forneceram dados que sustentam o modelo. Observações de sistemas como Beta Pictoris (Figura 2.2) e GW Orionis (Figura 2.3) revelam discos protoplanetários em torno de estrelas jovens. Esses discos, com suas estruturas de anéis e lacunas, são consistentes com as previsões teóricas de formação planetária em andamento.

Dentro desse modelo, o disco protoplanetário possuía um gradiente de temperatura decrescente com a distância ao Sol. Em uma determinada região,

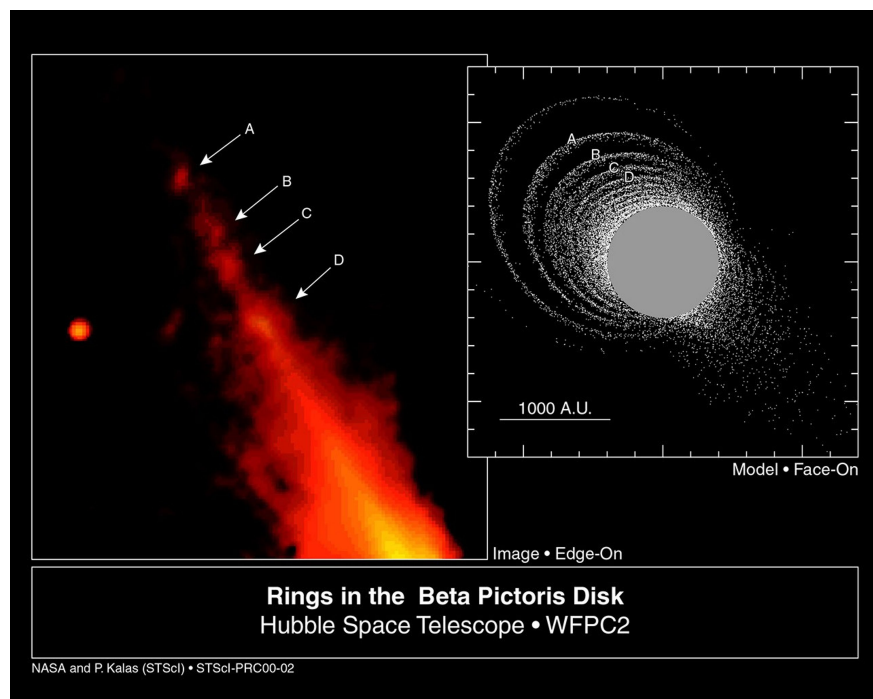


Figura 2.2: O disco protoplanetário em torno da estrela Beta Pictoris. As letras indicam possíveis regiões de formação de protoplanetas. (Fonte: (kraus2020))

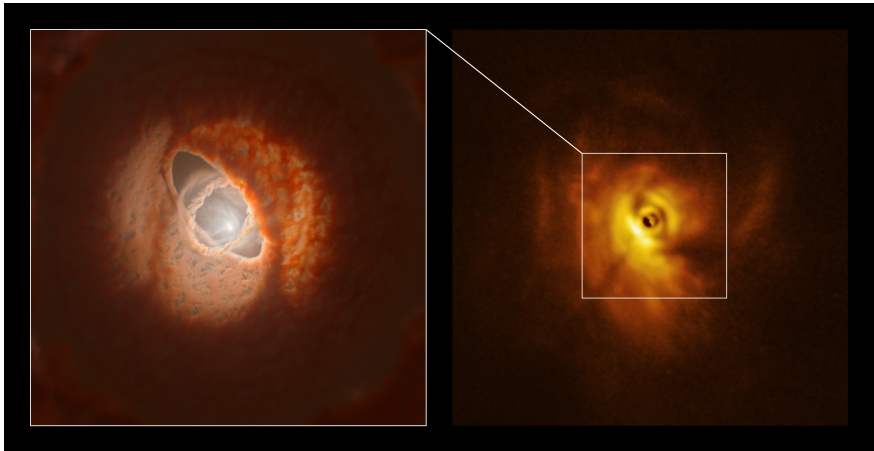


Figura 2.3: O sistema estelar triplo GW Orionis, localizado na constelação de Orion, exibe um disco protoplanetário com anéis desalinhados. (Fonte: (Kalas et al., 2000))

apenas os materiais com ponto de fusão superior à temperatura local podiam se condensar, resultando em uma distribuição radial da composição química.

Os asteroides e outros corpos menores são interpretados como remanescentes desse processo. Eles seriam fragmentos de colisões entre planetesimais ou corpos que não acumularam massa suficiente para se tornarem planetas.

Capítulo 3

Descrição da Órbita Planetária

Uma descrição do movimento de um corpo celeste, tal como um asteroide ou um planeta, sob a influência gravitacional de um corpo central massivo, como o Sol, é fundamentada no **Problema de Dois Corpos**. Este constitui um modelo idealizado no qual a interação entre os dois corpos é exclusivamente a força gravitacional mútua, desprezando-se todas as outras perturbações externas. Uma premissa do modelo, particularmente no contexto do Sistema Solar, é que a massa do corpo central (Sol, M) é bem superior à massa do corpo orbitante (planeta ou asteroide, m), de modo que a condição $M \gg m$ é satisfeita. Esta aproximação permite-nos considerar o corpo central como um ponto de referência inercial, uma simplificação que conduz a uma formulação matemática tratável e elegante.

A base dinâmica para o Problema de Dois Corpos é a Lei da Gravitação Universal de Newton, que postula que a força exercida pelo corpo de massa M sobre o corpo de massa m é dada por:

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (3.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal, \vec{r} é o vetor posição do corpo m em relação a M , $r = \|\vec{r}\|$ é a distância entre os centros de massa dos dois corpos, e $\hat{r} = \vec{r}/r$ é o vetor unitário na direção radial.

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante sobre o corpo m é igual ao produto de sua massa pela sua aceleração $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$. Ao igualar a força gravitacional à força inercial, obtemos a equação do movimento para o corpo orbitante em um referencial heliocêntrico:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (3.2)$$

Uma simplificação imediata e conveniente consiste em dividir ambos os lados pela massa m , o que nos fornece a equação da aceleração, independente da massa do corpo orbitante:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \hat{r} \quad (3.3)$$

Para simplificar a notação, é comum introduzir o **parâmetro gravitacional padrão**, $\mu = GM$. Este parâmetro combina a constante da gravitação com a massa do

corpo central, sendo conhecido com uma precisão muito maior do que G ou M individualmente. A equação do movimento, então, assume sua forma canônica:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = \vec{0} \quad (3.4)$$

Esta é uma equação diferencial vetorial de segunda ordem que governa a trajetória $\vec{r}(t)$ do corpo secundário. A sua solução completa revela as leis fundamentais que regem o movimento orbital.

3.1 Solução da Equação do Movimento: Seções Cônicas

O Problema de Dois Corpos, conforme descrito pela Equação (3.4), é um dos raros problemas em mecânica celeste que admite uma solução analítica exata. A solução revela duas propriedades fundamentais do movimento: a sua planaridade e a forma geométrica da trajetória.

3.1.1 Conservação do Momento Angular e a Planaridade da Órbita

Uma consequência imediata da natureza central da força gravitacional é a **conservação do momento angular**. O momento angular por unidade de massa, \vec{h} , é definido como o produto vetorial do vetor posição \vec{r} pelo vetor velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (3.5)$$

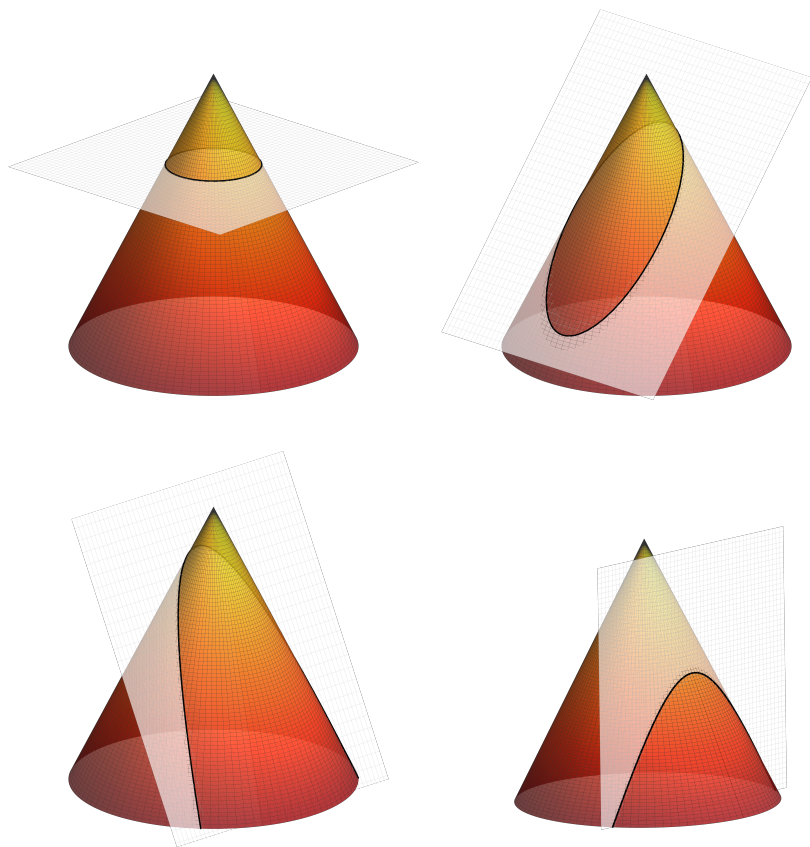


Figura 3.1: As seções cônicas como soluções do Problema de Dois Corpos, classificadas pela sua excentricidade e . Todas as trajetórias partilham o corpo central como um de seus focos. A elipse ($0 \leq e < 1$) é a única órbita ligada e fechada, enquanto a parábola ($e = 1$) e a hipérbole ($e > 1$) são órbitas de escape, não-ligadas.

Para verificar a sua conservação, derivamos \vec{h} em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \quad (3.6)$$

O primeiro termo, $(d\vec{r}/dt \times \vec{v})$, é o produto vetorial de um vetor com ele mesmo, $(\vec{v} \times \vec{v})$, que é identicamente nulo. O segundo termo envolve a aceleração, $d\vec{v}/dt = \vec{a}$. Substituindo a equação do movimento (3.4), temos:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right) = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r}) \quad (3.7)$$

Novamente, o produto vetorial de um vetor por si mesmo é nulo. Portanto, obtemos:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{0} \quad (3.8)$$

Isto demonstra que o vetor momento angular por unidade de massa, \vec{h} , é um **vetor constante** ao longo de todo o movimento. A constância do vetor \vec{h} tem uma implicação geométrica profunda: o vetor posição \vec{r} e o vetor velocidade \vec{v} estarão sempre contidos em um plano que é perpendicular ao vetor constante \vec{h} . Este plano é o **plano orbital**, e a sua existência simplifica enormemente a análise, reduzindo o problema de três para duas dimensões.

3.1.2 Equação da Órbita via Vetor de Laplace-Runge-Lenz

Embora existam vários métodos para derivar a forma da órbita, a utilização do **vetor de Laplace-Runge-Lenz (LRL)**, \vec{e} , oferece uma abordagem particularmente

elegante. Este vetor, que também é uma quantidade conservada no Problema de Kepler, é definido por:

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \hat{r} \quad (3.9)$$

A sua conservação ($d\vec{e}/dt = \vec{0}$) pode ser demonstrada através de manipulação vetorial da equação do movimento ¹. A importância do vetor \vec{e} está no fato de que ele é um vetor constante que *jaz no plano orbital*, sendo uma combinação linear de $\vec{v} \times \vec{h}$ e \vec{r} , além de apontar do foco (o Sol) para o ponto de maior aproximação da órbita, o **periélio**. Para obter a equação da trajetória, realizamos o produto escalar de \vec{e} com o vetor posição \vec{r} :

$$\vec{e} \cdot \vec{r} = \left(\frac{\vec{v} \times \vec{h}}{\mu} - \hat{r} \right) \cdot \vec{r} \quad (3.10)$$

O lado esquerdo é $\vec{e} \cdot \vec{r} = e \cos f$, onde $e = \|\vec{e}\|$ é o módulo constante do vetor LRL, e f é o ângulo entre o vetor \vec{e} e o vetor posição \vec{r} . Este ângulo f é precisamente a **anomalia verdadeira**. Analisemos o lado direito termo a termo:

- O primeiro termo é $\frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{h}) \cdot \vec{r}$. Usando a propriedade do produto triplo escalar $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$, temos:

$$(\vec{v} \times \vec{h}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2 \quad (3.11)$$

onde $h = \|\vec{h}\|$ é o módulo do momento angular.

¹um exercício deixado ao leitor

- O segundo termo é $(-\hat{r}) \cdot \vec{r} = -\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} = -\frac{r^2}{r} = -r$.

Juntando os termos, a Equação (3.10) torna-se:

$$er \cos f = \frac{h^2}{\mu} - r \quad (3.12)$$

Agora, podemos isolar r para obter a sua dependência com o ângulo f :

$$\begin{aligned} r + er \cos f &= \frac{h^2}{\mu} \\ r(1 + e \cos f) &= \frac{h^2}{\mu} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente, chegamos à equação da órbita em coordenadas polares:

$$r(f) = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (3.14)$$

Esta é a equação polar de uma **seção cônica** com o foco na origem. Os parâmetros que definem a trajetória são constantes do movimento, com significados físicos diretos:

- $p \equiv h^2/\mu$: O **semi-latus rectum**, que representa a distância radial quando $f = \pi/2$, ou seja, a “largura” da órbita na altura do foco. Este parâmetro está unicamente determinado pelo momento angular da órbita.
- $e \equiv \|\vec{e}\|$: A **excentricidade**, um número adimensional que define a forma da órbita. Como veremos, está diretamente ligada à energia orbital total.

- f : A **anomalia verdadeira**, que é o ângulo polar medido a partir da direção do periélio, mesma direção do vetor \vec{e} . Por construção, $f = 0$ corresponde ao periélio.

A equação da órbita é, portanto, canonicamente escrita como:

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (3.15)$$

3.1.3 Energia Orbital e a Classificação das Órbitas

Além do momento angular, a **energia mecânica total por unidade de massa**, E , é outra quantidade conservada no Problema de Dois Corpos. Ela é a soma da energia cinética e da energia potencial gravitacional, ambas por unidade de massa:

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (3.16)$$

onde $v = \|\vec{v}\|$ é a magnitude da velocidade. A conservação da energia ($dE/dt = 0$) pode ser demonstrada derivando a equação acima e utilizando a equação do movimento, e implica que a velocidade do corpo orbitante é maior quando ele está mais próximo do corpo central (periélio) e menor quando está mais distante ().

Existe uma relação entre a energia E e a excentricidade e . Para encontrá-la, avaliamos a energia em um ponto conveniente da órbita. No periélio, a anomalia verdadeira é $f = 0$, a distância é $r_p = p/(1 + e)$, e o vetor velocidade \vec{v}_p é perpendicular ao vetor posição \vec{r}_p . Neste ponto, o módulo do momento angular é simplesmente $h = r_p v_p$. Assim, a velocidade no periélio é $v_p = h/r_p$.

Substituindo na equação da energia:

$$E = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{\mu}{r_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{r_p}\right)^2 - \frac{\mu}{r_p} \quad (3.17)$$

Agora, substituímos $r_p = p/(1 + e)$ e $p = h^2/\mu$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{(p/(1+e))^2} - \frac{\mu}{p/(1+e)} \\ &= \frac{\mu^2}{2h^2}(e^2 - 1) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Esta equação revela a conexão direta entre energia e excentricidade. Podemos rearranjá-la para expressar a excentricidade em termos da energia e do momento angular:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}} \quad (3.19)$$

O valor da excentricidade e , que é determinado unicamente pela energia e momento angular do sistema, define a natureza geométrica da órbita, conforme ilustrado na Figura 3.2:

- **Órbita Elíptica** ($E < 0 \implies 0 \leq e < 1$): Se a energia total é negativa, o corpo está gravitacionalmente preso. A trajetória é uma elipse fechada. Este é o caso de planetas, luas, e a maioria dos asteroides e cometas periódicos no Sistema Solar.

- **Órbita Circular** ($E = E_{\min} \implies e = 0$): Um caso especial da elipse, correspondendo à energia mínima possível para um dado momento angular h . A distância radial é constante e igual ao semi-latus rectum, $r = p$.
- **Órbita Parabólica** ($E = 0 \implies e = 1$): Se a energia total é exatamente zero, o corpo possui a velocidade de escape. A trajetória é uma parábola aberta, e o corpo nunca retorna.
- **Órbita Hiperbólica** ($E > 0 \implies e > 1$): Se a energia total é positiva, o corpo possui um excesso de velocidade além da velocidade de escape. A trajetória é uma hipérbole aberta. Este é o caso de objetos interestelares que passam pelo Sistema Solar ou de sondas espaciais em trajetórias de escape.

3.2 Elementos Orbitais

Para descrever a trajetória de um corpo celeste no espaço tridimensional, a forma da órbita, dada pela Equação (3.15), é insuficiente. É necessário especificar também a sua **dimensão** e a sua **orientação** espacial. No contexto do Problema de Dois Corpos, um conjunto de seis parâmetros independentes, conhecidos como **elementos orbitais** ou **elementos keplerianos**, é necessário e suficiente para definir a órbita e a posição do corpo nela em qualquer instante de tempo. Para uma órbita não perturbada, cinco desses elementos são constantes.

Dois elementos definem as propriedades intrínsecas da elipse orbital:

1. **Semieixo Maior** (a): Este elemento define a dimensão da órbita elíptica. Como veremos, ele está diretamente relacionado à energia orbital total,

que é uma constante do movimento. Para órbitas elípticas, a energia por unidade de massa é dada por:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.20)$$

Esta relação mostra que a energia de uma órbita ligada depende exclusivamente do seu semieixo maior, e não da sua excentricidade.

2. **Excentricidade (e):** Como já estabelecido, este elemento define a forma da órbita. Para as órbitas elípticas e ligadas que caracterizam os planetas e asteroides, temos $0 \leq e < 1$.

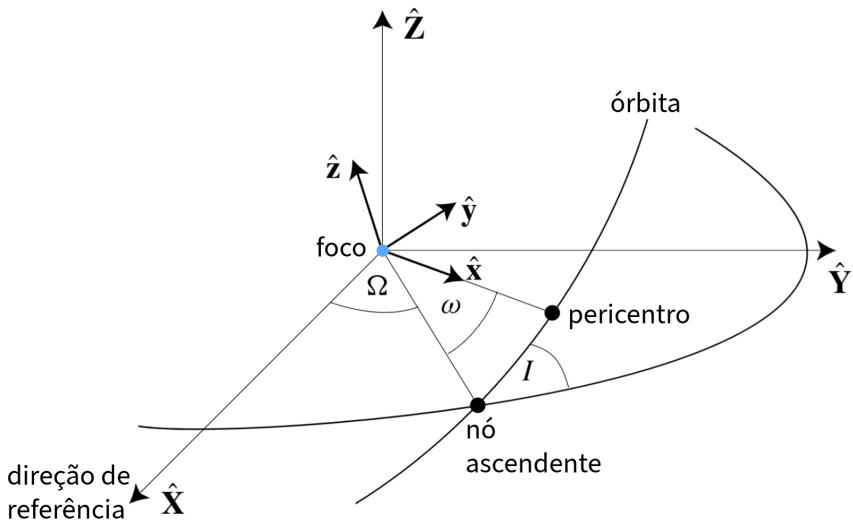


Figura 3.2: Elementos orbitais Ω , I , ω que definem a orientação da órbita elíptica no espaço. Adaptado de Murray e Dermott, 1999

A partir destes dois elementos, podemos encontrar outras propriedades geométricas importantes da elipse. As distâncias de maior e menor aproximação ao foco são o **periélio** e o **apelélio**, respectivamente.

- **Distância de Periélio (q):** Ocorre quando a anomalia verdadeira $f = 0$. A partir da equação da órbita (3.15):

$$q = r(f = 0) = \frac{p}{1 + e \cos(0)} = \frac{p}{1 + e} \quad (3.21)$$

- **Distância de Apelélio (Q):** Ocorre quando a anomalia verdadeira $f = \pi$. A distância correspondente é:

$$Q = r(f = \pi) = \frac{p}{1 + e \cos(\pi)} = \frac{p}{1 - e} \quad (3.22)$$

O eixo maior da elipse, que é a sua maior dimensão, tem comprimento $2a$ e é a soma das distâncias de periélio e apelélio. Esta relação permite-nos conectar o semieixo maior a ao semi-latus rectum p e à excentricidade e . A demonstração é direta:

$$\begin{aligned} 2a &= q + Q \\ &= \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{p - pe + p + pe}{1 - e^2} \\ &= \frac{2p}{1 - e^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Cancelando o fator de 2, obtemos a relação para órbitas elípticas:

$$p = a(1 - e^2) \quad (3.24)$$

Esta equação é útil, pois conecta o parâmetro dinâmico $p = h^2/\mu$ aos parâmetros geométricos a e e . Substituindo (3.24) de volta nas expressões para periélio e , obtemos as suas formas mais comuns e convenientes:

$$q = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e) \quad (3.25)$$

$$Q = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 - e} = a(1 + e) \quad (3.26)$$

3.2.1 Elementos que Definem a Orientação da Órbita

Os próximos três elementos orbitais são ângulos que fixam a orientação do plano orbital e da elipse dentro desse plano, em relação a um sistema de coordenadas de referência. Para o Sistema Solar, o sistema de referência padrão é o **Sistema de Coordenadas Eclípticas**, definido como (ver Figura 3.3):

- O **plano fundamental** (plano xy) é o plano da órbita da Terra em torno do Sol, conhecido como a **Eclíptica**.
- A **direção fundamental** (eixo x) aponta para o **ponto vernal** ou **primeiro ponto de Áries** (γ). Esta é a direção do Sol, visto da Terra, no instante do equinócio de março. Embora esta direção se mova lentamente devido à precessão dos equinócios, ela é fixada em uma data específica (uma época, como J2000.0) para constituir um sistema de referência quasi-inercial.

Os três ângulos de orientação são:

3. **Inclinação (I ou i):** É o ângulo entre o plano orbital do corpo e o plano da eclíptica. Uma inclinação $I = 0^\circ$ significa que o corpo orbita exatamente no mesmo plano que a Terra (movimento coplanar), enquanto $I = 90^\circ$ descreve uma órbita polar. Para órbitas retrógradas (movimento no sentido oposto à maioria dos corpos do Sistema Solar), a inclinação é $I > 90^\circ$.
4. **Longitude do Nodo Ascendente (Ω):** A interseção do plano orbital com o plano da eclíptica define uma linha chamada **linha dos nodos**. O **nodo ascendente** é o ponto onde o corpo cruza a eclíptica movendo-se do hemisfério sul celeste para o norte (sentido $+z$). A longitude do nodo ascendente, Ω , é o ângulo medido no plano da eclíptica, a partir da direção do ponto vernal (γ), até a direção do nodo ascendente.
5. **Argumento do Periélio (ω):** Este ângulo define a orientação da elipse *dentro* do seu próprio plano orbital. É o ângulo medido no plano orbital, a partir da direção do nodo ascendente, até a direção do periélio (o ponto de maior aproximação ao Sol).

3.2.2 Órbita Osculadora

No Problema de Dois Corpos idealizado, os cinco elementos geométricos (a , e , I , Ω , ω) são rigorosamente constantes. Contudo, o Sistema Solar real é um sistema de N -corpos. Um asteroide, por exemplo, não é apenas atraído pelo Sol, mas também sofre perturbações gravitacionais de Júpiter, Saturno, Terra e todos os outros planetas. Consequentemente, o seu movimento real não descreve uma elipse perfeita e imutável.

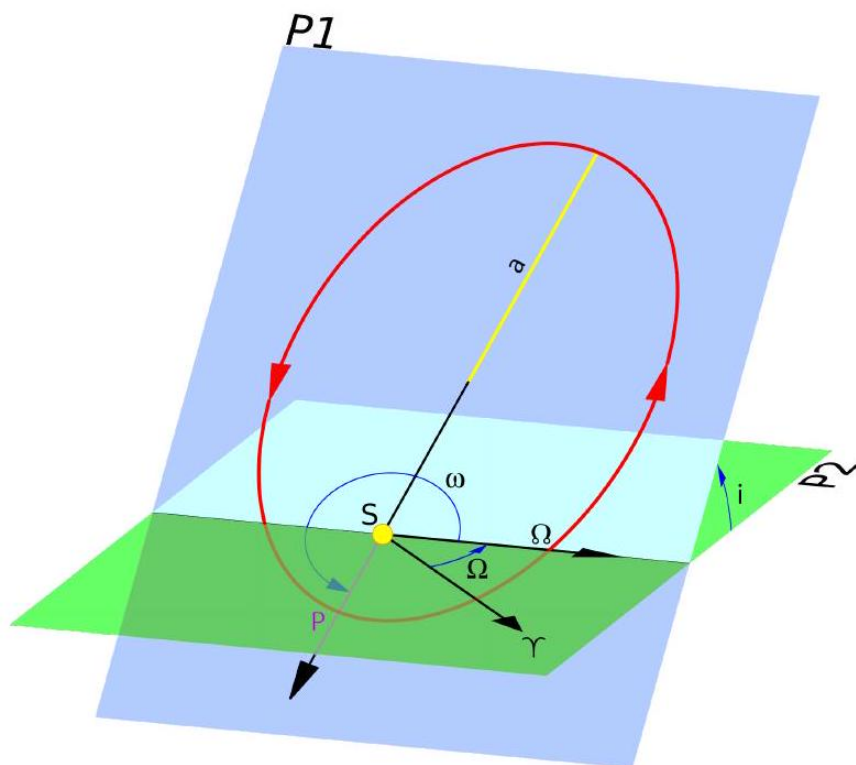


Figura 3.3: Esquematização dos elementos orbitais que definem a orientação de uma órbita elíptica. O Sol (S) ocupa um dos focos. O plano de referência (P2) é a Eclíptica, e o plano da órbita é P1. A direção de referência γ é o ponto vernal. Os três ângulos de Euler—inclinação (i), longitude do nodo ascendente (Ω), e argumento do periélio (ω)—fixam a órbita no espaço tridimensional.

Para reconciliar a teoria com a realidade, introduz-se o conceito de **órbita osculadora**. Em qualquer instante de tempo t , o corpo real possui um vetor de posição $\vec{r}(t)$ e um vetor de velocidade $\vec{v}(t)$. A partir deste par de vetores (o *estado* do sistema), é possível definir uma única e exclusiva órbita kepleriana (uma elipse do Problema de Dois Corpos) que é tangente à trajetória real naquele ponto e que corresponderia ao movimento do corpo se, naquele exato instante, todas as forças perturbadoras fossem subitamente removidas, deixando apenas a atração do Sol.

Esta elipse tangente e instantânea é a órbita osculadora (do latim *osculari*, beijar). Os seus elementos orbitais, $a(t)$, $e(t)$, $I(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, não são mais constantes, mas variam lentamente com o tempo sob a influência das perturbações. As bases de dados astronômicas, como as do Minor Planet Center, listam os elementos osculadores para uma **época** de referência específica (um instante t_0), que servem como uma fotografia precisa da órbita naquele momento.

3.3 Posição no Tempo: Anomalias e a Equação de Kepler

Os cinco elementos geométricos (a, e, I, Ω, ω) definem a trajetória elíptica no espaço, mas não especificam *onde* o corpo se encontra ao longo dessa trajetória em um determinado instante de tempo t . Para isso, é necessário um sexto elemento, que ancora o movimento a uma referência temporal.

3.3.1 Anomalia Verdadeira (f)

A posição angular física do corpo em sua órbita, medida no plano orbital a partir do periélio, é a **anomalia verdadeira** (f). No Problema de Dois Corpos, f varia com o tempo, $f = f(t)$. No entanto, essa variação não é uniforme. A Segunda Lei

de Kepler, que é uma consequência direta da conservação do momento angular, estabelece que a linha que une o Sol ao corpo varre áreas iguais em tempos iguais. A taxa de varredura de área é constante e dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{df}{dt} = \frac{h}{2} \quad (3.27)$$

Daqui, obtemos a velocidade angular instantânea:

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (3.28)$$

Como a distância radial r varia ao longo da órbita (conforme a Equação (3.15)), a velocidade angular \dot{f} também não é constante. O corpo move-se mais rapidamente no periélio (onde r é mínimo) e mais lentamente no (onde r é máximo). A relação direta entre f e t envolve uma integral que não possui uma solução analítica em forma fechada, o que motiva a introdução de ângulos auxiliares.

3.3.2 Anomalia Média (M)

Para contornar a complexidade da relação $f(t)$, introduz-se uma variável angular fictícia, a **anomalia média** (M), que, por definição, cresce linearmente com o tempo. Ela representa o ângulo que o corpo *teria* se estivesse se movendo em uma órbita circular com o mesmo período orbital T da órbita elíptica real.

O período orbital T é dado pela Terceira Lei de Kepler, que pode ser derivada integrando a lei das áreas sobre a área total da elipse, $A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$:

$$T = \frac{2A}{h} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{h} \quad (3.29)$$

Usando $h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, obtemos:

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{a^{1/2} \sqrt{\mu} \sqrt{1 - e^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (3.30)$$

O **movimento médio** (n) é a velocidade angular média, definida como a taxa de variação da anomalia média:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (3.31)$$

A anomalia média em um tempo t é então definida pela relação linear:

$$M(t) = M_0 + n(t - t_0) \quad (3.32)$$

onde t_0 é a **época** de referência e M_0 é a **anomalia média na época**, o sexto e último elemento orbital. Este elemento fixa o ponto de partida do corpo em sua órbita no instante t_0 .

3.3.3 Anomalia Excêntrica (\mathcal{E}) e a Equação de Kepler

A ponte entre a anomalia média M , que está ligada ao tempo e a anomalia verdadeira f , ligada a posição física, é feita por meio de um ângulo auxiliar geométrico: a **anomalia excêntrica** (\mathcal{E}). Para uma órbita elíptica, a anomalia excêntrica é definida com o auxílio de um círculo auxiliar de raio a (o semieixo maior), circunscrito à elipse.

As relações geométricas que conectam r , f e \mathcal{E} são:

$$r = a(1 - e \cos \mathcal{E}) \quad (3.33)$$

$$\cos f = \frac{\cos \mathcal{E} - e}{1 - e \cos \mathcal{E}} \quad (3.34)$$

$$\sin f = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \mathcal{E}}{1 - e \cos \mathcal{E}} \quad (3.35)$$

Uma forma mais prática para a relação entre f e \mathcal{E} é a identidade da tangente do meio-ângulo:

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{\mathcal{E}}{2}\right) \quad (3.36)$$

A etapa final e importante é derivar a relação entre a anomalia média M (tempo) e a anomalia excêntrica \mathcal{E} (geometria). Esta relação é a célebre **Equação de Kepler**. A sua demonstração parte da dinâmica do movimento. Começamos com a taxa de variação da área, $dA/dt = h/2$. A área infinitesimal varrida dA pode ser expressa em termos de \mathcal{E} . A relação entre as coordenadas cartesianas no plano orbital (x, y) e a anomalia excêntrica é $x = a(\cos \mathcal{E} - e)$ e $y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \mathcal{E}$.

Uma abordagem mais direta é diferenciar a Equação (3.33) em relação ao tempo:

$$\dot{r} = ae \sin \mathcal{E} \cdot \dot{\mathcal{E}} \quad (3.37)$$

A componente radial da velocidade também pode ser escrita como $\dot{r} = v_r = (\vec{v} \cdot \vec{r})/r$. Usando a equação da energia (vis-viva) $v^2 = \mu(2/r - 1/a)$ e a decomposição $v^2 = v_r^2 + v_t^2$, onde $v_t = h/r$ é a velocidade tangencial, temos:

$$\dot{r}^2 = v^2 - (h/r)^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{h^2}{r^2} \quad (3.38)$$

Substituindo $h^2 = \mu a(1 - e^2)$ e $r = a(1 - e \cos \mathcal{E})$, após uma longa sequência de manipulações algébricas, chega-se a:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{n}{1 - e \cos \mathcal{E}} \quad (3.39)$$

Esta equação relaciona a taxa de variação da anomalia excêntrica com a própria anomalia excêntrica. Reorganizando, temos:

$$(1 - e \cos \mathcal{E}) d\mathcal{E} = ndt \quad (3.40)$$

Podemos integrar esta equação desde a passagem pelo periélio (onde, por definição, $t = t_p$, $M = 0$ e $\mathcal{E} = 0$) até um tempo genérico t (correspondente a uma anomalia excêntrica \mathcal{E}):

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{E}} (1 - e \cos \mathcal{E}') d\mathcal{E}' &= \int_{t_p}^t n dt' \\ [\mathcal{E}' - e \sin \mathcal{E}']_0^{\mathcal{E}} &= n[t']_{t_p}^t \\ (\mathcal{E} - e \sin \mathcal{E}) - (0 - e \sin 0) &= n(t - t_p) \end{aligned} \quad (3.41)$$

O termo $n(t - t_p)$ é, por definição, a anomalia média M medida a partir da passagem pelo periélio. Assim, chegamos à Equação de Kepler:

$$M = \mathcal{E} - e \sin \mathcal{E} \quad (3.42)$$

Esta equação transcendental, que não pode ser resolvida para \mathcal{E} em termos de funções elementares, é a ponte entre o tempo (via M) e a posição na órbita (via \mathcal{E} , que então leva a r e f).

O procedimento completo para encontrar a posição (\vec{r}, \vec{v}) a partir dos elementos orbitais $(a, e, I, \Omega, \omega, M_0)$ em um tempo t é, portanto:

1. Calcular a anomalia média $M(t)$ usando a Equação (3.32).
2. Resolver a Equação de Kepler (3.42) para a anomalia excêntrica \mathcal{E} . Esta etapa requer um método numérico, como o método de Newton-Raphson.
3. Com \mathcal{E} conhecido, calcular a distância radial r e a anomalia verdadeira f usando as Equações (3.33) e (3.36).

4. Finalmente, transformar as coordenadas polares orbitais (r, f) para coordenadas cartesianas (x, y, z) no referencial da eclíptica usando as matrizes de rotação definidas pelos ângulos I, Ω, ω .

Capítulo 4

Dinâmica do Sistema Solar

Conforme explorado no capítulo anterior, a órbita ideal denominada órbita Kepleriana, é completamente definida por um conjunto de seis constantes de integração, os elementos orbitais ($a, e, I, \Omega, \omega, M_0$).

Contudo, a realidade do Sistema Solar é consideravelmente mais complexa. O movimento de um asteroide, por exemplo, não é ditado apenas pela força dominante do Sol; ele é simultaneamente atraído por Júpiter, Saturno, Terra e, em princípio, por todos os outros corpos do sistema. A trajetória real de qualquer corpo é, portanto, o resultado de um **Problema de N-Corpos**, um desafio que cativou matemáticos e físicos por séculos e que representa a transição da mecânica celeste idealizada para a dinâmica planetária realista.

Neste capítulo, investigaremos a formulação matemática do Problema de N-Corpos, exploraremos as razões de sua notória insolubilidade analítica e apresentaremos as técnicas de perturbação que formam a base da mecânica ce-

leste moderna, permitindo-nos prever o movimento dos corpos celestes com boa precisão. Analisaremos também casos especiais de grande importância, como o Problema Restrito de Três Corpos, que nos oferece informações importantes sobre a estabilidade de sistemas planetários e a existência de regiões de equilíbrio como os Pontos de Lagrange.

4.1 Formulação do Problema de N-Corpos

Consideremos um sistema isolado composto por N corpos, tratados como massas pontuais, identificados pelos índices $i = 1, \dots, N$. Cada corpo possui uma massa m_i e sua posição em um referencial inercial (por exemplo, o baricentro do Sistema Solar) é dada pelo vetor posição \vec{r}_i . A única interação considerada entre quaisquer dois corpos é a força gravitacional mútua, conforme a Lei da Gravitação Universal de Newton.

O movimento de um corpo específico i é determinado pela soma vetorial de todas as forças gravitacionais exercidas sobre ele por todos os outros $N - 1$ corpos do sistema. A força que um corpo j exerce sobre o corpo i , denotada por \vec{F}_{ji} , é dada por:

$$\vec{F}_{ji} = G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|} = -G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (4.1)$$

onde G é a constante da gravitação universal e $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ é o vetor que aponta do corpo j para o corpo i .

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante sobre o corpo i , \vec{F}_i , é igual ao produto de sua massa pela sua aceleração, $\vec{a}_i = d^2\vec{r}_i/dt^2$. A força resultante é a superposição de todas as forças individuais:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji} \quad (4.2)$$

Combinando estes princípios, a equação diferencial vetorial de segunda ordem que governa o movimento do corpo i é:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(-G \frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right) \quad (4.3)$$

Podemos simplificar a equação dividindo pela massa inercial m_i (invocando o Princípio da Equivalência, que iguala a massa inercial à massa gravitacional), obtendo a equação para a aceleração do corpo i :

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} \quad (4.4)$$

Este é um sistema de N equações diferenciais vetoriais, o que corresponde a $3N$ equações escalares de segunda ordem. A característica deste sistema é o seu **acoplamento**: a aceleração de cada corpo i depende da posição de todos os outros corpos j . Não é possível resolver a equação para um corpo isoladamente dos demais. Para $N = 3$, temos o célebre Problema de Três Corpos, que já se mostra, em sua forma geral, insolúvel analiticamente.

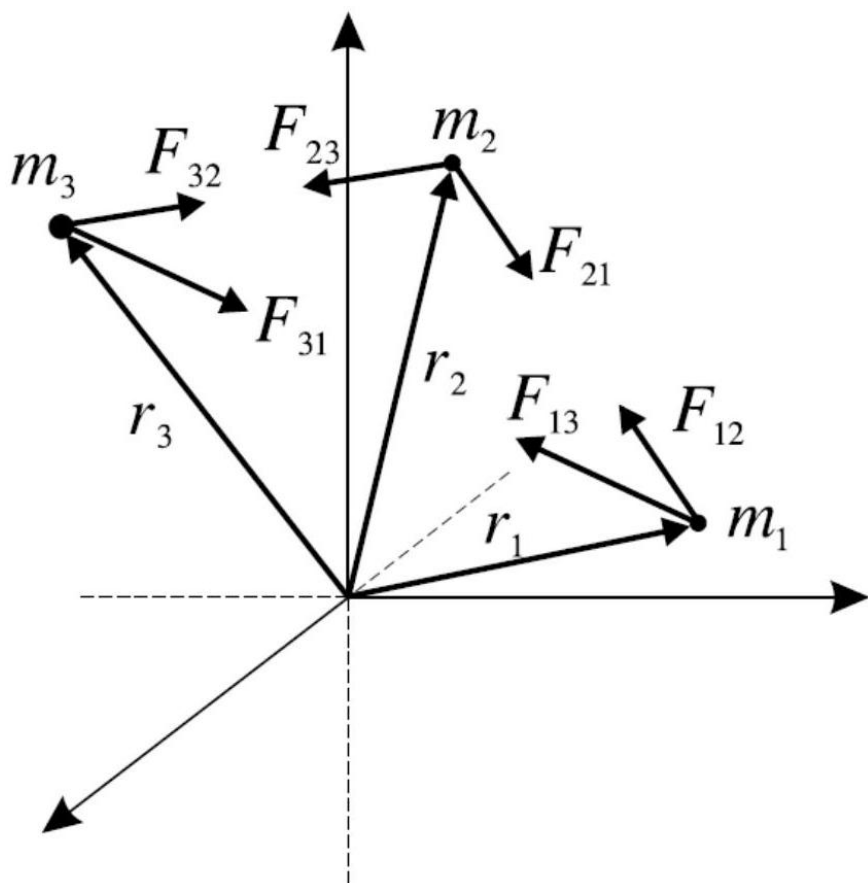


Figura 4.1: Esquematização do Problema de Três Corpos, onde três massas m_1, m_2, m_3 interagem mutuamente sob a lei da gravitação. A aceleração de cada corpo depende instantaneamente da posição dos outros dois, levando a um sistema de equações acopladas.

4.2 Três corpos já é demais!

Para resolver o sistema de equações (4.4), seria necessário encontrar uma expressão analítica para a trajetória de cada corpo, $\vec{r}_i(t)$, em função do tempo e das condições iniciais. Um sistema de $3N$ equações diferenciais de segunda ordem requer, em geral, $6N$ integrações para ser resolvido. A solução geral, portanto, dependeria de $6N$ constantes de integração, que são determinadas pelas $3N$ componentes de posição e $3N$ componentes de velocidade iniciais de todos os corpos do sistema.

Na mecânica Hamiltoniana, uma solução geral por quadratura é possível se o sistema possuir um número suficiente de **integrais de movimento** – funções das posições e momentos dos corpos que permanecem constantes ao longo do tempo. Para um sistema com $3N$ graus de liberdade, seriam necessárias $3N$ integrais de movimento independentes e em involução. No entanto, o Problema de N-Corpos, para $N > 2$, é deficiente em tais integrais.

As simetrias fundamentais do espaço e do tempo impõem a existência de certas quantidades conservadas, conhecidas como as **10 integrais clássicas do movimento**, que existem independentemente do número N de corpos. Estas integrais surgem da invariância das leis da física sob translações espaciais, rotações espaciais e translações temporais.

Conservação do Momento Linear (3 integrais): A ausência de forças externas, quando o sistema é isolado, implica a conservação do momento linear total, \vec{P} . A derivada temporal de $\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$ é:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad (4.5)$$

A força total sobre o corpo i , \vec{F}_i , é a soma das forças internas \vec{F}_{ji} . Portanto, a força total sobre o sistema é a soma de todas as forças internas:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji} \quad (4.6)$$

Esta soma dupla contém todos os pares de forças de ação e reação. Pela Terceira Lei de Newton, $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$. Podemos agrupar a soma em pares:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) = \sum_{i < j} (\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji}) = \vec{0} \quad (4.7)$$

Assim, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$, o que implica que o vetor momento linear total \vec{P} é constante. Isso nos fornece **três integrais escalares** do movimento, uma para cada componente: P_x, P_y, P_z .

Movimento do Centro de Massa (3 integrais): A conservação do momento linear leva diretamente à descrição do movimento do centro de massa (CM), cujo vetor

posição é $\vec{R}_{CM} = (\sum m_i \vec{r}_i) / (\sum m_i)$. A velocidade do CM é $\vec{V}_{CM} = d\vec{R}_{CM}/dt = \vec{P} / (\sum m_i)$. Como \vec{P} é constante, \vec{V}_{CM} também é. Integrando no tempo, obtemos:

$$\vec{R}_{CM}(t) = \vec{V}_{CM}t + \vec{R}_{CM}(0) \quad (4.8)$$

Isso fornece **três integrais** que descrevem o movimento retilíneo e uniforme do centro de massa. Embora úteis, estas integrais descrevem o movimento do sistema como um todo, e não as complexas interações internas. Elas permitem reduzir a ordem do sistema, mas não o resolvem.

Conservação do Momento Angular (3 integrais): A natureza central da força gravitacional (ela atua ao longo da linha que une os dois corpos) leva à conservação do momento angular total, $\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, onde $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. Sua derivada temporal é:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^N \left((\vec{v}_i \times \vec{p}_i) + (\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \right) \quad (4.9)$$

O primeiro termo, $\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i$, é zero. O segundo termo é $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$, o torque sobre a partícula i . O torque total no sistema é:

$$\vec{\tau}_{total} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}) \quad (4.10)$$

Agrupando em pares (i, j) com $i < j$:

$$\vec{\tau}_{total} = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} \quad (4.11)$$

Como a força \vec{F}_{ji} é paralela ao vetor $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, seu produto vetorial é nulo. Portanto, $\vec{\tau}_{total} = \vec{0}$ e $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$. O vetor momento angular total é conservado, fornecendo mais **três integrais escalares**: L_x, L_y, L_z .

Conservação da Energia (1 integral): A força gravitacional é uma força conservativa, o que significa que pode ser expressa como o gradiente de uma função de energia potencial escalar, U . A energia total do sistema, $E = K + U$, onde K é a energia cinética total, é conservada. A energia cinética é $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$. A energia potencial gravitacional do sistema é a soma das energias potenciais de todos os pares de partículas:

$$U = - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \quad (4.12)$$

A energia total, conhecida como a integral de Jacobi para o Problema de N-Corpos, é a **décima e última integral clássica**:

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} = \text{constante} \quad (4.13)$$

No total, temos $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ integrais de movimento clássicas. Para o Problema de Dois Corpos ($N = 2$), o sistema requer $6N = 12$ constantes. As 10

integrais clássicas, juntamente com a redução do problema ao movimento de um corpo fictício e a conservação do vetor de Laplace-Runge-Lenz (que fornece mais duas integrais independentes), tornam o problema completamente **integrável**.

No entanto, para o Problema de Três Corpos ($N = 3$), o sistema requer $6N = 18$ integrais. Como apenas 10 são conhecidas, faltariam 8. Por séculos, os matemáticos buscaram essas integrais faltantes. O trabalho culminou no final do século XIX, quando, em 1890, **Henri Poincaré** demonstrou um resultado revolucionário: em geral, não existem outras integrais de movimento que sejam funções analíticas (algébricas e independentes do tempo) das coordenadas e momentos. O Problema de N-Corpos (para $N \geq 3$) é fundamentalmente **não-integrável**. A ausência de uma solução analítica geral implica que as trajetórias podem exibir um comportamento complexo e imprevisível a longo prazo, conhecido hoje como **caos determinístico**.

4.3 Abordagem via Teoria de Perturbações

Se a solução analítica geral do Problema de N-Corpos é impossível, como podemos prever o movimento dos planetas e asteroides com a precisão observada? A resposta está na estrutura hierárquica do Sistema Solar. A massa do Sol (M_{\odot}) é tão dominante que as forças exercidas pelos outros corpos (planetas, luas, etc.) são ordens de magnitude menores. Por exemplo, a massa do Sol é aproximadamente 1047 vezes a massa de Júpiter (M_J), o planeta mais massivo.

Esta hierarquia nos permite tratar o movimento real como uma *perturbação* da órbita elíptica ideal do Problema de Dois Corpos. A força gravitacional total sobre um corpo i (um asteroide, por exemplo) pode ser decomposta em duas partes:

a força dominante do Sol e a soma de todas as outras forças, que constituem a **força perturbadora**.

A equação de movimento (4.4) para um asteroide i de massa m_i pode ser reescrita separando a atração do Sol (massa M_\odot , índice S) da atração dos $N - 2$ planetas perturbadores (massa m_j , índice j):

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = GM_S \frac{\vec{r}_S - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_S\|^3} + G \sum_{j \neq i, S} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} \quad (4.14)$$

Para um tratamento mais rigoroso, é preferível usar um referencial heliocêntrico, com a origem no Sol. Neste caso, o vetor posição do asteroide é $\vec{r}_{iS} = \vec{r}_i - \vec{r}_S$. A equação de movimento para o asteroide em relação ao Sol é $\frac{d^2 \vec{r}_{iS}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_S}{dt^2}$. Substituindo as acelerações de i e S devidas a todos os outros corpos, após alguma álgebra, a equação assume a forma canônica:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{iS}}{dt^2} + G \frac{(M_\odot + m_i)}{r_{iS}^3} \vec{r}_{iS} = \sum_{j \neq i, S} G m_j \left(\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_{Sj}}{r_{Sj}^3} \right) \quad (4.15)$$

onde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ e $\vec{r}_{Sj} = \vec{r}_j - \vec{r}_S$. O lado esquerdo da equação descreve um Problema de Dois Corpos perfeito entre o Sol (com massa efetiva $M_\odot + m_i$) e o asteroide. O lado direito é a **força perturbadora**, \vec{R}_i . O primeiro termo, \vec{r}_{ij}/r_{ij}^3 , é a atração direta do planeta j sobre o asteroide i . O segundo termo, $-\vec{r}_{Sj}/r_{Sj}^3$, é a **parte indireta** da perturbação, que corrige o fato de nosso referencial (o Sol) não ser verdadeiramente inercial, pois ele também é acelerado pelos planetas j .

A força perturbadora \vec{R}_i pode ser derivada de um potencial escalar R_i , a **Função Perturbadora**:

$$R_i = \sum_{j \neq i, S} Gm_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (4.16)$$

4.3.1 Órbita Osculadora e Equações Planetárias de Lagrange

Na ausência de perturbações ($\vec{R}_i = \vec{0}$), a solução da Equação (4.15) é uma elipse fixa no espaço, cujos seis elementos orbitais ($a, e, I, \Omega, \omega, M_0$) são constantes. A presença da pequena força perturbadora \vec{R}_i faz com que a trajetória real se desvie continuamente desta elipse ideal.

O conceito de **órbita osculadora** (do latim *osculari*, beijar) é uma ferramenta matemática poderosa para lidar com essa situação. Em qualquer instante de tempo t , a posição real $\vec{r}(t)$ e a velocidade real $\vec{v}(t)$ do asteroide definem uma única e inequívoca órbita Kepleriana (uma elipse, no caso de corpos ligados) que seria seguida pelo corpo se, naquele exato instante, todas as perturbações fossem subitamente desligadas. Esta elipse instantânea, que é tangente à trajetória real no ponto $(\vec{r}(t), \vec{v}(t))$, é a órbita osculadora.

Em vez de uma órbita fixa, o movimento real pode ser visualizado como uma transição contínua de uma órbita osculadora para a próxima. Os elementos orbitais desta elipse – $a(t), e(t), I(t), \Omega(t), \omega(t), M(t)$ – não são mais constantes, mas variam lentamente com o tempo. Eles são os **elementos osculadores**.

O trabalho de Joseph-Louis Lagrange no século XVIII forneceu o formalismo para calcular essa variação. Ele derivou as **Equações Planetárias de Lagrange**, um sistema de seis equações diferenciais de primeira ordem que descrevem a

taxa de variação de cada elemento osculador em função das derivadas parciais da Função Perturbadora R_i :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R_i}{\partial M} \quad (4.17)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R_i}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R_i}{\partial \omega} \quad (4.18)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\cos I}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial R_i}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial R_i}{\partial \Omega} \quad (4.19)$$

∴ (e assim por diante para $d\Omega/dt, d\omega/dt, dM/dt$)

Resolver este sistema de equações, geralmente por métodos numéricos ou analíticos aproximados, permite prever a evolução da órbita de um asteroide ou planeta ao longo de milhares ou milhões de anos.

4.3.2 Elementos Próprios

O estudo da Função Perturbadora, geralmente expandida em séries trigonométricas complexas, revela que a evolução de um elemento osculador $E(t)$ é uma

superposição de oscilações com diferentes frequências e amplitudes. De forma genérica, a solução pode ser escrita como:

$$E(t) = E_p + \sum_k A_k \cos(\nu_k t + \phi_k) \quad (4.20)$$

Os termos na soma representam **variações periódicas** de curto e longo período, causadas pelas configurações geométricas variáveis com os planetas perturbadores. O termo constante E_p é o **elemento próprio**, que representa o valor médio de longo prazo do elemento orbital, livre das oscilações de curto período. Os elementos próprios são considerados a verdadeira assinatura dinâmica de um corpo, definindo sua afiliação a uma **família de asteroides** – um grupo de corpos que se originaram da fragmentação de um mesmo corpo parental.

4.4 Problema Restrito de Três Corpos

Apesar da insolubilidade geral do Problema de Três Corpos, um caso especial de imensa importância prática, conhecido como **Problema Restrito de Três Corpos (PR3C)**, admite uma análise mais profunda e revela características fundamentais da dinâmica em sistemas hierárquicos. Proposto e estudado por Lagrange em 1772, o modelo é definido por duas simplificações importantes:

1. Duas massas primárias, m_1 e m_2 (com $m_1 \geq m_2$), denominadas primários, orbitam seu centro de massa comum em **órbitas perfeitamente circulares** sob sua mútua atração gravitacional.
2. Uma terceira massa, m_3 , é uma **partícula-teste** com massa desprezível ($m_3 \rightarrow 0$). Isso significa que m_3 é afetada pela gravidade de m_1 e m_2 ,

mas não os afeta de forma alguma. O movimento dos primários permanece um Problema de Dois Corpos puro e não perturbado.

Este modelo é uma excelente aproximação para muitos cenários no Sistema Solar, como o movimento de um asteroide ou cometa (m_3) sob a influência do Sol (m_1) e de Júpiter (m_2), ou o movimento de uma sonda espacial (m_3) no sistema Terra-Lua.

4.4.1 Referencial Girante e a Integral de Jacobi

A chave para a análise do PR3C é a escolha de um sistema de coordenadas não-inercial, o **referencial girante**, que roda junto com os corpos primários. Neste referencial, que gira com a mesma velocidade angular constante, n , do sistema m_1 - m_2 , as posições dos primários são fixas.

A equação do movimento para a partícula-teste m_3 (com vetor posição \vec{r}) neste referencial deve incluir as chamadas *forças de inércia* ou *forças fictícias*, que surgem devido à aceleração do próprio referencial, como

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{grav} - 2(\vec{n} \times \dot{\vec{r}}) - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) \quad (4.21)$$

onde $\ddot{\vec{r}}$ e $\dot{\vec{r}}$ são a aceleração e a velocidade da partícula no referencial girante, \vec{F}_{grav} é a soma das forças gravitacionais de m_1 e m_2 , o segundo termo é a **Força de Coriolis**, dependente da velocidade, e o terceiro termo é a **Força Centrífuga**, dependente da posição.

Uma propriedade interessante deste sistema é que a combinação das forças conservativas gravitacional e centrífuga, pode ser descrita por um potencial efetivo, Ω . Lagrange demonstrou que, embora a energia mecânica não seja con-

servada neste referencial devido à força de Coriolis, que realiza trabalho, existe uma outra quantidade conservada, uma integral do movimento conhecida como **Constante de Jacobi (C_J)**:

$$C_J = 2\Omega - v^2 = \text{constante} \quad (4.22)$$

onde $v = \|\dot{\vec{r}}\|$ é a magnitude da velocidade da partícula no referencial girante e Ω é o potencial efetivo, dado por:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \quad (4.23)$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias da partícula-teste m_3 aos primários m_1 e m_2 , respectivamente. A Constante de Jacobi completa é, portanto:

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}\right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (4.24)$$

4.4.2 Superfícies de Velocidade Zero e Pontos de Lagrange

A existência da Constante de Jacobi tem uma consequência geométrica profunda. Para um dado valor de C_J (determinado pelas condições iniciais do movimento), a Equação (4.22) pode ser rearranjada para $v^2 = 2\Omega - C_J$. Como a velocidade ao quadrado, v^2 , deve ser não-negativa, o movimento da partícula-teste está confinado às regiões do espaço onde a condição $2\Omega(x, y, z) \geq C_J$ é satisfeita.

A fronteira desta região, definida pela equação $C_J = 2\Omega(x, y, z)$, corresponde aos locais onde a velocidade v seria zero. Estas fronteiras são as **Superfícies**

de Velocidade Zero. Elas funcionam como barreiras intransponíveis que delimitam as regiões do espaço acessíveis à partícula.

Lagrange investigou a topologia dessas superfícies e questionou se existiam pontos de equilíbrio no sistema – pontos onde a partícula-teste pudesse permanecer estacionária no referencial girante. Para que um ponto seja de equilíbrio, sua velocidade e aceleração no referencial girante devem ser nulas ($\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$). Da Equação (4.21), isso implica que a força gravitacional resultante deve ser exatamente balanceada pela força centrífuga. Matematicamente, os pontos de equilíbrio são os pontos estacionários do potencial efetivo Ω , ou seja, os pontos onde $\nabla\Omega = \vec{0}$.

Lagrange encontrou que existem exatamente **cinco** desses pontos, hoje conhecidos como os **Pontos de Lagrange** (L1 a L5), cujas localizações e propriedades serão derivadas em detalhe na Seção 4.5.

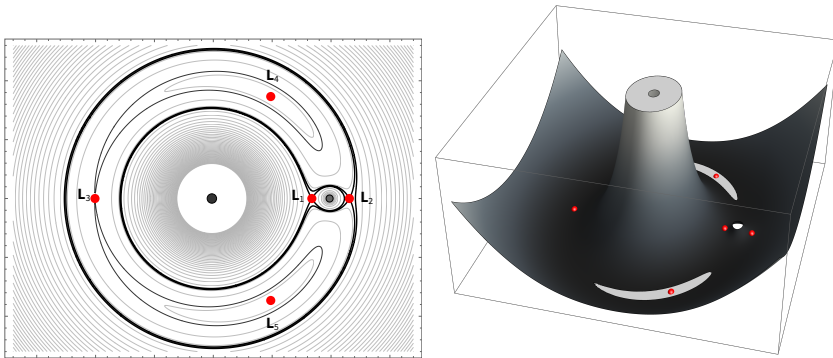


Figura 4.2: Curvas equipotenciais do potencial efetivo Ω para o Problema Restrito de Três Corpos, ilustrando a topologia para diferentes valores da constante de Jacobi C_J . Os cinco pontos de Lagrange (L1 a L5) são os pontos de equilíbrio do sistema. As regiões hachuradas são proibidas para o movimento.

4.4.3 Esfera de Hill e Limite de Roche

A análise do potencial de Jacobi e das superfícies de velocidade zero no Problema Restrito de Três Corpos leva naturalmente a dois conceitos fundamentais que definem as zonas de influência e os limites de estabilidade estrutural de corpos em sistemas hierárquicos.

A **Esfera de Hill**, ou mais precisamente, o Lobo de Hill, define a região do espaço ao redor de um corpo secundário (um planeta, m_2) dentro da qual sua atração gravitacional é dominante sobre a do corpo primário (o Sol, m_1). Em outras palavras, é a região onde o planeta pode reter satélites (luas) em órbitas estáveis de longo prazo. Fora da Esfera de Hill, um objeto será primariamente controlado pela gravidade do Sol.

A fronteira desta região é definida pela topologia das superfícies de velocidade zero. Especificamente, o raio da Esfera de Hill é aproximado pela distância do corpo secundário m_2 aos pontos de Lagrange colineares L1 e L2, que atuam como portais gravitacionais através dos quais um objeto pode passar do controle do planeta para o controle do Sol, e vice-versa. Uma dedução rigorosa, baseada na localização aproximada de L1 e L2 para o caso em que $m_2 \ll m_1$, fornece o **raio de Hill**, R_H :

$$R_H \approx a_p(1 - e_p)^3 \sqrt{\frac{m_p}{3(M_S + m_p)}} \quad (4.25)$$

onde a_p e e_p são o semieixo maior e a excentricidade da órbita do planeta (m_p) em torno do Sol (M_S). Para a maioria das aplicações no Sistema Solar, a órbita

do planeta é quase circular ($e_p \approx 0$) e sua massa é muito menor que a do Sol ($M_S + m_p \approx M_S$), simplificando a fórmula para sua forma mais comum:

$$R_H \approx a_p^3 \sqrt{\frac{m_p}{3M_S}} \quad (4.26)$$

O **Limite de Roche**, nomeado em homenagem a Édouard Roche, que o derivou em 1848, descreve um conceito diferente: o limite de sobrevivência estrutural de um corpo secundário devido às forças de maré exercidas pelo corpo primário (planeta). As **forças de maré** surgem porque a atração gravitacional do planeta é mais forte no lado do satélite que está mais próximo e mais fraca no lado que está mais distante. Essa diferença de forças, ou gradiente de força, tende a esticar o satélite.

Se o satélite for mantido coeso apenas por sua própria auto-gravidade (como um aglomerado de rochas, um cometa ou um satélite fluido), haverá uma distância crítica na qual a força de maré diferencial excede a força de coesão gravitacional do satélite, fazendo com que ele se desintegre. Essa distância é o Limite de Roche.

Para o caso de um satélite fluido sem rigidez tênsil, com densidade ρ_s , orbitando um planeta de raio R_p e densidade ρ_p , o limite de Roche, d_R , é dado por:

$$d_R \approx 2.44 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3} \quad (4.27)$$

Para um satélite rígido, o fator numérico é menor, cerca de 1.26. O valor de 2.44 é o mais relevante para a formação de anéis e a desintegração de cometas. Este

fenômeno explica elegantemente por que os principais sistemas de anéis dos planetas gigantes existem todos dentro do Limite de Roche de seus respectivos planetas. Eles são provavelmente os restos de luas ou cometas que se aventuraram perto demais e foram desintegrados, ou material do disco protoplanetário que nunca conseguiu se aglutinar para formar uma lua.

4.5 Pontos de Equilíbrio de Lagrange

Conforme antecipado, o Problema Restrito de Três Corpos (PR3C) admite soluções analíticas exatas para configurações muito específicas. Estas são os pontos de equilíbrio no referencial girante, onde um corpo de massa desprezível pode permanecer estacionário em relação aos dois corpos primários. Nesses pontos, a atração gravitacional combinada de m_1 e m_2 , juntamente com a força centrífuga (no referencial girante), somam-se vetorialmente a zero, resultando em uma aceleração nula para a partícula-teste.

Para encontrar estes pontos, buscamos os pontos estacionários (ou pontos críticos) do potencial efetivo de Jacobi, Ω , ou seja, os pontos (x, y, z) que satisfazem a condição $\nabla\Omega = \vec{0}$.

Para simplificar a álgebra de forma significativa, é convencional adotar um sistema de unidades normalizadas, onde as constantes fundamentais do problema são definidas como unitárias:

1. **Soma das massas dos primários é a unidade:** $m_1 + m_2 = 1$. A massa do sistema é normalizada. A massa do primário menor é frequentemente denotada pelo parâmetro de massa $\mu = m_2/(m_1 + m_2) = m_2$. Consequentemente, $m_1 = 1 - \mu$.

2. **Distância entre os primários é a unidade:** A distância R entre m_1 e m_2 é fixada em $R = 1$.
3. **Constante gravitacional é a unidade:** $G = 1$.

Uma consequência imediata desta normalização, a partir da Terceira Lei de Kepler para a órbita circular dos primários ($n^2 R^3 = G(m_1 + m_2)$), é que a velocidade angular do sistema, n , também se torna unitária: $n^2(1)^3 = (1)(1) \implies n = 1$.

Neste sistema de coordenadas, o centro de massa do sistema é a origem $(0, 0, 0)$. Os corpos primários são colocados estaticamente no eixo x . Suas posições são $\vec{r}_1 = (-m_2, 0, 0) = (-\mu, 0, 0)$ e $\vec{r}_2 = (m_1, 0, 0) = (1 - \mu, 0, 0)$.

Como o potencial efetivo de Jacobi Ω para uma partícula-teste na posição (x, y, z) é dado pela (4.23), com $n = 1$, $G = 1$, $m_1 = 1 - \mu$ e $m_2 = \mu$, o potencial, frequentemente denotado por U neste contexto, torna-se

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (4.28)$$

onde r_1 e r_2 são as distâncias da partícula-teste aos primários m_1 e m_2 , respectivamente:

$$r_1^2 = (x - (-\mu))^2 + y^2 + z^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \quad (4.29)$$

$$r_2^2 = (x - (1 - \mu))^2 + y^2 + z^2 \quad (4.30)$$

4.5.1 Cálculo dos Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio são os locais onde o gradiente do potencial U se anula, ou seja, $\nabla U = (0, 0, 0)$. Calculando as derivadas parciais de U a partir da Equação (4.28):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x-(1-\mu)) = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{r_1^3}y - \frac{\mu}{r_2^3}y = y \left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0 \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1-\mu}{r_1^3}z - \frac{\mu}{r_2^3}z = -z \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) = 0 \quad (4.33)$$

Análise da Coordenada z : A Equação (4.33) nos dá a primeira grande simplificação. Como os termos $1-\mu$, μ , r_1 e r_2 são todos positivos, a expressão em parênteses é estritamente positiva. Portanto, a única maneira de a equação ser satisfeita é se $z = 0$. Isso prova que todos os cinco pontos de equilíbrio de Lagrange devem estar no plano orbital dos corpos primários. São, portanto, **soluções coplanares**.

Com $z = 0$, o problema se reduz a encontrar as soluções (x, y) para as duas equações restantes.

A Equação (4.32) nos oferece duas possibilidades distintas:

1. $y = 0$
2. $1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0$

Estas duas possibilidades dão origem a duas famílias de soluções: as colineares e as triangulares.

Soluções Colineares (L1, L2, L3)

Assumindo a primeira possibilidade, $y = 0$ (e $z = 0$), a partícula-teste está localizada no eixo x , alinhada com m_1 e m_2 . A equação $\partial U / \partial y = 0$ é automaticamente satisfeita. Resta apenas resolver $\partial U / \partial x = 0$ (Equação (4.31)) sob a condição $y = 0$. Neste caso, as distâncias r_1 e r_2 são simplesmente as distâncias ao longo do eixo: $r_1 = |x + \mu|$ e $r_2 = |x - (1 - \mu)|$. A equação a ser resolvida torna-se:

$$x - \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} \operatorname{sgn}(x + \mu) - \frac{\mu}{(x - (1 - \mu))^2} \operatorname{sgn}(x - (1 - \mu)) = 0 \quad (4.34)$$

Esta é uma equação algébrica complexa. Analisando as três regiões possíveis no eixo x (à esquerda de m_1 , entre m_1 e m_2 , e à direita de m_2), pode-se mostrar que em cada região existe exatamente uma raiz real. A expansão desta equação leva a um polinômio de quinto grau (quintica) em x , que não possui solução geral em termos de radicais. No entanto, Euler demonstrou a existência dessas três raízes reais, que correspondem aos três pontos de Lagrange colineares:

- **L1:** Localizado entre m_1 e m_2 . É um ponto de equilíbrio instável (ponto de sela do potencial).
- **L2:** Localizado além de m_2 (o corpo menor). Também instável.
- **L3:** Localizado além de m_1 (o corpo maior). Também instável.

Soluções Triangulares (L4 e L5)

Assumindo a segunda possibilidade, $y \neq 0$, a equação $\partial U / \partial y = 0$ exige que o termo em parênteses seja nulo:

$$1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \quad (4.35)$$

Agora, examinamos a equação $\partial U / \partial x = 0$ (Equação (4.31)) sob esta nova condição.

A equação é:

$$x - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu) - \frac{\mu}{r_2^3}(x - (1 - \mu)) = 0 \quad (4.36)$$

Da condição (4.35), podemos expressar $\frac{\mu}{r_2^3} = 1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3}$. Substituindo na equação de x :

$$\begin{aligned} x - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(x + \mu) - \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3}\right)(x - (1 - \mu)) &= 0 \\ x - x + (1 - \mu) - \frac{1 - \mu}{r_1^3} [(x + \mu) - (x - (1 - \mu))] &= 0 \\ (1 - \mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como $m_1 = 1 - \mu \neq 0$, a única solução é $1 - \frac{1}{r_1^3} = 0$, o que implica $r_1^3 = 1$, e portanto, $r_1 = 1$. Substituindo $r_1 = 1$ de volta na condição (4.35), obtemos:

$$1 - \frac{1 - \mu}{1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \implies 1 - (1 - \mu) - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \implies \mu - \frac{\mu}{r_2^3} = 0 \quad (4.38)$$

Como $\mu = m_2 \neq 0$, a única solução é $r_2^3 = 1$, e portanto, $r_2 = 1$. Esta demonstração mostra que as soluções não-colineares só podem existir se $r_1 = r_2 = 1$. Ou seja, a partícula-teste deve estar à mesma distância de m_1 e m_2 , e essa distância deve ser igual à distância entre m_1 e m_2 . Os três corpos devem formar um **triângulo equilátero**.

Para encontrar as coordenadas (x, y) destes pontos, resolvemos o sistema (com $z = 0$):

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 = 1 \quad (4.39)$$

$$r_2^2 = (x - (1 - \mu))^2 + y^2 = 1 \quad (4.40)$$

Igualando as duas equações:

$$(x + \mu)^2 + y^2 = (x - (1 - \mu))^2 + y^2$$

$$0 = -2x + 1 - 2\mu \implies 2x = 1 - 2\mu$$

$$x = \frac{1 - 2\mu}{2} = \frac{1}{2} - \mu \quad (4.41)$$

Finalmente, substituímos x em (4.39) para encontrar y :

$$\begin{aligned} x + \mu &= \left(\frac{1}{2} - \mu\right) + \mu = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 1 \implies y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.43)$$

Isso nos dá as duas soluções triangulares, descobertas por Lagrange:

- **L4:** $\left(\frac{1}{2} - \mu, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Lidera o movimento de m_2 em 60° .
- **L5:** $\left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Segue o movimento de m_2 em 60° .

4.5.2 Estabilidade e Aplicação: Asteroides Troianos

Uma análise de estabilidade linear do potencial efetivo em torno desses pontos de equilíbrio revela que os pontos colineares L1, L2 e L3 são sempre instáveis (pontos de sela). Pequenos desvios de um corpo nesses pontos crescerão exponencialmente.

Surpreendentemente, os pontos triangulares L4 e L5 são linearmente **estáveis** se o parâmetro de massa do corpo secundário, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$, for suficientemente pequeno. A condição de estabilidade é:

$$\mu < \mu_{\text{crit}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) \approx 0.03852... \quad (4.44)$$

Se a massa do segundo primário for menor que aproximadamente 3.85% da massa total do sistema, os pontos L4 e L5 são estáveis, o que significa que um corpo próximo a esses pontos executará pequenas órbitas em torno deles, permanecendo na região por longos períodos.

Esta condição é amplamente satisfeita por todos os sistemas Sol-Planeta no Sistema Solar. O caso mais proeminente é o sistema Sol-Júpiter, que levou à primeira confirmação observacional da teoria de Lagrange com a descoberta do asteroide (588) Achilles em 1906. Hoje, milhares de **Asteroides Troianos** são

conhecidos, agrupados em torno dos pontos L4 (Campo Grego) e L5 (Campo Troiano) da órbita de Júpiter.

Capítulo 5

Determinação de Órbita e Avaliação de Risco

Os capítulos anteriores estabeleceram o arcabouço teórico para descrever o movimento dos corpos celestes, desde a órbita Kepleriana idealizada do Problema de Dois Corpos até a complexa dança gravitacional do Problema de N-Corpos. Foi demonstrado que, embora uma solução analítica geral para $N \geq 3$ seja inatingível, a abordagem por meio de perturbações permite prever a evolução de um sistema com boa precisão, *desde que o estado inicial do sistema seja conhecido*. Esta última condição é o cerne de um dos problemas mais fundamentais e desafiadores da astronomia prática: a determinação da órbita de um corpo celeste recém-descoberto.

O problema de predição orbital, portanto, não é meramente a solução de uma equação de dois corpos, mas a integração numérica de um sistema de N-corpos.

Contudo, um desafio ainda mais importante precede a integração: para prever o futuro de um asteroide, devemos primeiro determinar seu estado presente – seu vetor de estado 6-dimensional, composto por posição \vec{r} e velocidade \vec{v} – a partir de um conjunto limitado e inerentemente ruidoso de observações astronômicas.

Este capítulo aborda o que é efetivamente um **problema inverso**: como inferir um estado orbital de seis dimensões a partir de uma série de observações bidimensionais (angulares), como refinar essa órbita à medida que novos dados se tornam disponíveis e como utilizar a incerteza residual inerente a este processo para quantificar o risco de um futuro impacto com a Terra. Esta é a disciplina que conecta a mecânica celeste teórica à tarefa de vigilância e defesa planetária.

5.1 Da Observação à Órbita

As observações astrométricas de um corpo celeste recém-descoberto não fornecem diretamente sua posição tridimensional \vec{r} ou sua velocidade \vec{v} . O que se mede, em um instante de tempo t , é um par de coordenadas angulares na esfera celeste: a **ascensão reta** (α) e a **declinação** (δ). Estas duas quantidades, juntamente com o instante da observação, constituem a **linha de visada** (*Line of Sight*, LOS), que define um vetor unitário $\hat{\rho}$ que aponta do observatório para o objeto, mas não contém informação sobre a distância ao longo dessa linha.

A geometria do problema, em um referencial inercial como o Sistema de Coordenadas Baricêntrico Celeste (BCRS), é descrita pela soma vetorial que conecta o Sol (baricentro), o observatório na Terra e o asteroide:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{\rho}(t) \quad (5.1)$$

onde:

- $\vec{r}(t)$ é o vetor de posição heliocêntrico do asteroide. Este é o vetor de estado que, em última instância, buscamos determinar.
- $\vec{R}(t)$ é o vetor de posição heliocêntrico do observatório. Este vetor é conhecido com boa precisão, pois a órbita da Terra é modelada com exatidão e a localização do observatório na superfície terrestre também é conhecida.
- $\vec{\rho}(t)$ é o vetor de posição topocêntrico, do observatório ao asteroide. Este vetor contém a informação observacional.

O vetor topocêntrico $\vec{\rho}$ pode ser decomposto em sua magnitude e direção: $\vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$, onde $\rho = \|\vec{\rho}\|$ é a distância topocêntrica (a range), uma quantidade desconhecida, e $\hat{\rho}$ é o vetor unitário da linha de visada, determinado diretamente pelos ângulos observados (α, δ):

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \cos \delta(t) \cos \alpha(t) \\ \cos \delta(t) \sin \alpha(t) \\ \sin \delta(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Substituindo esta decomposição na equação geométrica, obtemos:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \rho(t) \hat{\rho}(t) \quad (5.3)$$

Esta equação é a essência do problema de determinação de órbita. Para cada observação (α, δ, t), conhecemos com precisão o vetor \vec{R} e o vetor unitário $\hat{\rho}$, mas a distância ρ e sua taxa de variação $\dot{\rho}$ são desconhecidas. O estado completo do asteroide é um vetor 6D (\vec{r}, \vec{v}). Uma única observação (α, δ) fornece apenas

duas restrições escalares. Portanto, para resolver as seis incógnitas, são necessárias no mínimo **três** observações distintas $(\alpha_i, \delta_i, t_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Este é o número mínimo de observações para que o problema se torne matematicamente determinado.

Na prática, os grandes levantamentos astronômicos, como o *Vera C. Rubin Observatory*, detectam centenas de milhares de pontos de luz em movimento a cada noite. Antes que uma órbita possa ser calculada, é preciso garantir que um conjunto de detecções, tipicamente obtidas em noites diferentes, pertença de fato ao mesmo objeto físico. Este é o **problema da ligação** (*linkage problem*).

Um conjunto de observações atribuídas a um mesmo objeto define um **arco observacional**. A precisão da órbita calculada está diretamente relacionada à duração deste arco – o intervalo de tempo entre a primeira e a última observação – e ao número de observações contidas nele. Arcos curtos, de poucas horas ou uma única noite, geralmente não restringem suficientemente a órbita para permitir predições futuras confiáveis. Arcos de várias semanas ou meses são necessários para uma determinação robusta.

Milani e Giovanni Federico Gronchi (2010) propõem uma taxonomia para o problema da identificação, que pode ser analisado a partir de quatro cenários distintos:

Ligação (Linkage) Ocorre quando se dispõe de dois ou mais arcos muito curtos (por exemplo, de noites diferentes), cada um insuficiente para uma determinação de órbita significativa. A ligação é o processo de testar a hipótese de que ambos os arcos pertencem ao mesmo objeto, usando-os em conjunto para calcular uma única órbita que se ajuste a todas as observações. Este é um problema combinatório desafiador.

Atribuição (Attribution) Ocorre quando um novo arco, geralmente muito curto para gerar uma órbita confiável por si só, é comparado com o catálogo de órbitas já computadas. O objetivo é tentar atribuir o novo arco a um objeto já conhecido, confirmando sua identidade e refinando sua órbita com os novos dados.

Identificação (Identification) Ocorre quando dois arcos independentes, ambos longos o suficiente para gerar suas próprias órbitas nominais e regiões de incerteza, são comparados. Se as duas órbitas (com suas respectivas incertezas) são estatisticamente compatíveis, elas são identificadas como pertencentes ao mesmo objeto. A fusão dos dois conjuntos de dados resulta em uma órbita única e muito mais precisa.

Recuperação (Recovery) É o processo em que, a partir de uma órbita já determinada, são realizadas predições para a posição de um objeto em uma época futura (para agendar novas observações) ou em uma época passada (para buscar o objeto em arquivos de dados ou placas fotográficas antigas, estendendo assim seu arco observacional para o passado).

5.2 Da Órbita Preliminar ao Refinamento por Mínimos Quadrados

O processo de determinação orbital é quase invariavelmente realizado em duas etapas sequenciais: o cálculo de uma **órbita preliminar**, que serve como uma primeira aproximação, seguido por um processo de **refinamento iterativo** que incorpora um modelo físico mais completo e utiliza todas as observações disponíveis.

O primeiro passo, dado um conjunto mínimo de observações (tipicamente três), é a determinação de uma **órbita preliminar**. Este é um desafio matemático não-trivial que visa encontrar o vetor de estado 6D (\vec{r}_0, \vec{v}_0) em uma época de referência t_0 que se ajuste a essas poucas observações, geralmente sob a suposição simplificada do Problema de Dois Corpos.

Os métodos clássicos para resolver este Problema de Determinação de Órbita Inicial (IOD, *Initial Orbit Determination*), como os desenvolvidos por Pierre-Simon de Laplace e Carl Friedrich Gauss no início do século XIX, fornecem o arcabouço matemático para esta tarefa. Embora ambos os métodos partam das mesmas três observações angulares, suas abordagens são diferentes:

- **Método de Laplace (1780):** É um método diferencial. Ele tenta calcular a posição \vec{r} e a velocidade \vec{v} no instante da observação central (t_2) expressando-as em termos das derivadas temporais do vetor de linha de visada, $\hat{\rho}$. As derivadas $\dot{\hat{\rho}}$ e $\ddot{\hat{\rho}}$ são estimadas numericamente a partir das três observações. O método é elegante, mas sensível a erros observacionais, especialmente para arcos curtos.
- **Método de Gauss (1801):** É um método geométrico-dinâmico. Gauss de maneira esperta contornou a necessidade de derivadas. Ele assumiu que o movimento do asteroide e da Terra ocorria em um plano (uma aproximação válida para arcos curtos) e usou a razão das áreas dos setores triangulares (formados pelo Sol e as posições do asteroide em t_1, t_2, t_3) como uma aproximação para a razão dos intervalos de tempo, uma consequência direta da Segunda Lei de Kepler. O método é mais robusto para arcos curtos e se tornou o padrão da área.

A obtenção da solução em ambos os métodos frequentemente depende da resolução de equações polinomiais de alto grau. No método de Gauss, por exemplo, chega-se a uma equação de oitavo grau para a distância heliocêntrica, o que pode levar a múltiplas soluções matemáticas. Apenas uma (ou às vezes nenhuma) corresponde a uma órbita fisicamente válida e elíptica, como interpretado geometricamente por ?.

5.2.1 Refinamento Orbital e a Órbita Nominal

A órbita preliminar é apenas uma primeira aproximação, baseada em um modelo físico simplificado (2-corpos) e um número mínimo de observações. À medida que mais observações são coletadas e o arco orbital se alonga, inicia-se o processo de **refinamento orbital** por meio do **Método dos Mínimos Quadrados Diferenciais**.

Este processo utiliza a órbita preliminar como um primeiro palpite para o estado inicial (\vec{r}_0, \vec{v}_0) . A partir deste estado, a trajetória do objeto é integrada numericamente, desta vez considerando o modelo físico mais completo possível, que inclui todas as perturbações relevantes. A equação de movimento integrada é:

$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-\frac{G(M_{\odot} + m_{\text{ast}})}{r^3}\vec{r}}_{\text{Termo de 2-Corpos}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_p} Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right)}_{\text{Perturbações Planetárias}} + \vec{F}_{\text{NG}} \quad (5.4)$$

onde j soma sobre todos os planetas perturbadores (e às vezes os asteroides mais massivos), e \vec{F}_{NG} representa as **forças não-gravitacionais**. Para asteroides pequenos (com diâmetros de quilômetros ou menos), a força mais significativa é o **efeito Yarkovsky**, um impulso térmico resultante da rotação do asteroide, que absorve radiação solar e a reemite de forma anisotrópica. Este pequeno, mas persistente,

impulso pode alterar significativamente o semieixo maior de um asteroide ao longo de décadas.

A trajetória integrada numericamente produz um conjunto de posições calculadas ($\alpha_{\text{calc}}, \delta_{\text{calc}}$) para cada instante de tempo em que uma observação foi feita. A diferença entre os valores observados e calculados forma o vetor de **resíduos** ($O - C$, *Observed minus Computed*). O método dos mínimos quadrados ajusta iterativamente os 6 parâmetros orbitais iniciais (o vetor de estado em uma época de referência t_0) de forma a minimizar a soma dos quadrados dos resíduos, ponderada pela incerteza de cada observação.

O resultado deste processo convergente é a **órbita nominal**, que representa a melhor solução de trajetória que se ajusta a todos os dados disponíveis sob o modelo físico adotado. Tão importante quanto a órbita nominal é sua **matriz de covariância**, um tensor 6x6 que descreve o tamanho, a forma e a orientação do **elipsoide de incerteza** no espaço de parâmetros orbitais de 6 dimensões. Esta matriz quantifica a incerteza em cada parâmetro orbital e as correlações entre eles, e é a entrada para toda a análise de risco subsequente.

5.3 Análise de Risco de Impacto: Da Incerteza à Probabilidade

A determinação de órbita com alta precisão é a base da defesa planetária. A análise de risco de impacto, contudo, foca não na órbita nominal em si, mas na sua **incerteza**, que é rigorosamente descrita pela matriz de covariância. Uma órbita nominal pode passar a milhões de quilômetros da Terra, mas se a sua incerteza for grande o suficiente, uma trajetória real dentro dessa nuvem de incerteza pode, de fato, colidir com nosso planeta.

5.3.1 Métricas de Triagem: MOID e a Classificação de PHAs

Dado o grande número de objetos sendo descobertos, uma triagem inicial é necessária para identificar rapidamente aqueles que merecem um monitoramento mais atento. Duas métricas principais são usadas para esta classificação:

1. **MOID (Minimum Orbit Intersection Distance):** A MOID, ou Distância Mínima de Interseção Orbital, introduzida por Δ , é a distância mínima entre as duas elipses osculadoras – a do asteroide e a da Terra. É uma medida puramente geométrica da quase-interseção das órbitas, calculada independentemente de onde os corpos estavam no momento da aproximação. Um MOID pequeno significa que as órbitas se cruzam ou passam muito perto uma da outra no espaço tridimensional.
2. **PHA (Potentially Hazardous Asteroid):** Um asteroide é classificado como **Potencialmente Perigoso (PHA)** se satisfaz dois critérios simultaneamente, estabelecidos pelo Minor Planet Center:
 - $\text{MOID}_{\oplus} \leq 0,05 \text{ UA}$ (aproximadamente 7,5 milhões de quilômetros, ou 19.5 vezes a distância média Terra-Lua).
 - magnitude absoluta $H \leq 22.0$.

O critério do MOID seleciona objetos cujas órbitas passam perigosamente perto da órbita da Terra. O critério da magnitude absoluta H é usado como um *critério de seleção* para o tamanho do objeto. A magnitude absoluta é o brilho que o objeto teria se estivesse a 1 UA do Sol e 1 UA da Terra, visto em ângulo de fase zero.

Ela está relacionada ao diâmetro D do asteroide e ao seu albedo (refletividade) p pela relação aproximada:

$$D \approx \frac{1329 \text{ km}}{\sqrt{p}} \cdot 10^{-0.2H} \quad (5.5)$$

O limite de $H = 22.0$ corresponde a um diâmetro de aproximadamente 140 metros para um albedo típico de 14%, selecionando assim objetos grandes o suficiente para causar devastação em escala regional ou, em casos extremos, global, caso venham a colidir com a Terra.

5.3.2 Propagação de Incerteza e o Método dos Asteroides Virtuais

A classificação como PHA é uma bandeira amarela, não uma bandeira vermelha. Ela não implica que um impacto ocorrerá, apenas que a geometria orbital permite encontros próximos. Para avaliar o risco real, é imperativo propagar a incerteza orbital no tempo.

O método padrão para isso é a técnica dos **Asteroides Virtuais (VAs)**, desenvolvida principalmente no âmbito do sistema de monitoramento de risco Sentry (JPL/NASA) e NEODyS (ESA). A região de incerteza $6D$, descrita pela órbita nominal e sua matriz de covariância, é amostrada estatisticamente, tipicamente por métodos de Monte Carlo. Este procedimento gera um grande número – milhares ou milhões – de clones orbitais, os VAs, cada um representando uma órbita ligeiramente diferente, mas todas estatisticamente consistentes com as observações astrométricas disponíveis.

Cada uma dessas órbitas de VA é então propagada numericamente no tempo, geralmente por 100 anos no futuro, usando o modelo dinâmico completo da

Equação (5.4). Este enxame de VAs, que começa como um elipsoide compacto em torno da posição nominal, se deforma e se alonga ao longo da trajetória, mapeando a evolução da incerteza. O alongamento ocorre principalmente ao longo da direção do movimento, refletindo a crescente incerteza na anomalia média do asteroide.

Durante a propagação, os sistemas de monitoramento procuram por VAs que passem dentro da **Esfera de Hill** da Terra, a região onde a gravidade terrestre domina sobre a do Sol. Se um subconjunto de VAs intersecta a Terra, a probabilidade de impacto é estimada como a razão entre o número de clones que colidem e o número total de clones gerados:

$$P_{\text{impacto}} = \frac{N_{\text{colisões}}}{N_{\text{total de VAs}}} \quad (5.6)$$

Este método permite não apenas calcular uma probabilidade, mas também identificar as datas específicas dos possíveis encontros perigosos. Quando novas observações de um asteroide são feitas, o arco observacional se alonga, a incerteza orbital (a matriz de covariância) diminui, e o enxame de VAs se encolhe. Na grande maioria dos casos, este refinamento exclui a Terra da região de incerteza futura, e a probabilidade de impacto calculada cai para zero. Em raras ocasiões, a probabilidade pode aumentar, sinalizando a necessidade de um monitoramento ainda mais intensivo.

Capítulo 6

Formalismo Matemático da Determinação de Órbitas

Os capítulos anteriores estabeleceram o arcabouço físico para a descrição do movimento orbital, transitando do Problema de Dois Corpos, que admite soluções analíticas exatas na forma de seções cônicas Keplerianas, para o Problema de N-Corpos, cuja complexidade intrínseca descreve a dinâmica real do Sistema Solar e impõe a necessidade de integração numérica. Esta abordagem constitui o que se denomina **problema direto**: dado um conjunto completo de condições iniciais – a posição e a velocidade de todos os corpos em um instante de tempo – a evolução futura do sistema pode ser, em princípio, determinada com a precisão desejada.

Este capítulo, em contrapartida, aprofunda-se no **problema inverso**, que representa a base da astronomia dinâmica e da mecânica celeste prática. O desafio consiste em inferir a trajetória completa de um corpo celeste a partir de

um conjunto de observações que são, por natureza, tanto incompletas quanto ruidosas. As observações astrométricas, tipicamente obtidas por telescópios terrestres ou espaciais, fornecem apenas informações direcionais bidimensionais (as coordenadas angulares na esfera celeste) e estão inevitavelmente contaminadas por erros de medição. O processo de determinação de órbita, portanto, transcende a mera aplicação de leis dinâmicas e se estabelece como um problema de **estimação estatística**: o de encontrar o conjunto de parâmetros orbitais que melhor se ajusta aos dados observacionais disponíveis, dentro dos limites de um modelo físico rigorosamente formulado.

6.1 Modelando Matematicamente

O processo de determinação de órbita é fundamentado na interação de dois modelos matemáticos distintos, porém interligados: o **modelo dinâmico**, que descreve a física do movimento do objeto, e o **modelo observacional**, que descreve a geometria da medição. A fusão destes dois modelos permite conectar os parâmetros que governam a trajetória (o estado orbital) com as quantidades que são efetivamente medidas (as posições angulares).

6.1.1 Equação do Movimento

O movimento de um corpo celeste de massa m_{ast} no Sistema Solar é governado pela Lei da Gravitação Universal de Newton, acrescida de quaisquer outras forças não-gravitacionais pertinentes. O estado cinemático completo do corpo em um instante de tempo t é univocamente descrito por seu **vetor de estado**, $\vec{y}(t)$, um vetor no espaço de fase de dimensão 6, que concatena sua posição tridimensional

$\vec{r}(t)$ e sua velocidade tridimensional $\vec{v}(t)$ em um referencial inercial, como o Sistema de Coordenadas Baricêntrico Celeste (BCRS).

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (6.1)$$

A evolução temporal deste vetor de estado é regida por um sistema de seis equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A derivada do vetor de estado em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \dot{\vec{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\vec{r}}(t) \\ \ddot{\vec{r}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}(t) \\ \vec{a}(t, \vec{y}, \mu) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

onde $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ é o vetor de aceleração total que atua sobre o corpo. Esta aceleração é, em geral, uma função do tempo t , do próprio estado \vec{y} (primariamente da posição \vec{r}) e de um conjunto de **parâmetros dinâmicos**, denotado pelo vetor μ . Agrupando os componentes da derivada do estado em uma única função vetorial \vec{f} , a equação do movimento assume sua forma canônica:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, t, \mu) \quad (6.3)$$

No contexto do Problema de N-Corpos, a aceleração \vec{a} é a soma vetorial da atração gravitacional do corpo central e das perturbações gravitacionais exercidas por

todos os outros corpos massivos do sistema (planetas, e por vezes os asteroides mais massivos), além de quaisquer acelerações não-gravitacionais \vec{a}_{NG} :

$$\begin{aligned} \vec{a}(t, \vec{y}, \mu) = & \underbrace{-G(M_{\odot} + m_{\text{ast}})\frac{\vec{r}}{r^3}}_{\text{Termo de 2-Corpos}} \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_p} Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j(t) - \vec{r}}{\|\vec{r}_j(t) - \vec{r}\|^3} - \frac{\vec{r}_j(t)}{r_j^3} \right)}_{\text{Perturbações Planetárias (Termo Indireto Incluído)}} + \vec{a}_{\text{NG}} \quad (6.4) \end{aligned}$$

Neste modelo completo, o vetor de parâmetros dinâmicos μ inclui as massas dos corpos perturbadores (m_j) e quaisquer parâmetros que modelam as forças não-gravitacionais, como o parâmetro A_2 do efeito Yarkovsky.

Dado um conjunto de **condições iniciais** – o vetor de estado \vec{y}_0 em uma época de referência t_0 – a integração numérica da Equação (6.3) produz a trajetória única do corpo, que pode ser expressa como uma função de fluxo Φ :

$$\vec{y}(t) = \Phi(t, t_0, \vec{y}_0, \mu) \quad (6.5)$$

Esta equação representa a solução do **problema direto**: conhecendo o estado inicial e os parâmetros dinâmicos, podemos prever o estado do sistema em qualquer instante de tempo t .

6.1.2 Modelo Observacional: Geometria da Medição

A prática astronômica raramente, ou nunca, mede o vetor de estado $\vec{y}(t)$ diretamente. As quantidades acessíveis são as observações astrométricas, O_i , que consistem em um par de ângulos (ascensão reta, α , e declinação, δ) medidos em

instantes de tempo específicos t_i . O **modelo observacional**, R , é a função matemática que mapeia o vetor de estado teórico $\vec{y}(t)$ para a observação calculada (ou prevista), $C(t)$:

$$C(t) = R(\vec{y}(t), t, \nu) \quad (6.6)$$

onde ν é um vetor de **parâmetros cinemáticos** ou observacionais. É importante distinguir estes dos parâmetros dinâmicos: ν não afeta a trajetória física do objeto, mas descreve a geometria da medição. Exemplos incluem as coordenadas precisas do observatório na superfície da Terra, correções instrumentais ou atmosféricas, e o tempo de propagação da luz (embora este último conecte a dinâmica e a cinemática).

Para uma observação astrométrica óptica, a função R executa a seguinte sequência de transformações geométricas:

1. Obtém-se a posição heliocêntrica do asteroide, $\vec{r}(t)$, a partir do vetor de estado $\vec{y}(t)$.
2. Obtém-se a posição heliocêntrica do observatório, $\vec{R}_{\text{obs}}(t)$, a partir de efemérides de alta precisão da Terra e do modelo de rotação terrestre.
3. Calcula-se o vetor de posição topocêntrico (do observatório ao asteroide), $\rho(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}_{\text{obs}}(t)$.
4. Converte-se o vetor topocêntrico $\rho(t)$ de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas, resultando no par de ângulos calculados (α_{calc} , δ_{calc}) no referencial celeste apropriado.

A **função de previsão**, $C(t)$, que conecta os parâmetros iniciais da órbita com as observações finais, é a composição do modelo dinâmico (Equação (6.5)) com o modelo observacional (Equação (6.6)):

$$C(t) = R(\Phi(t, t_0, \vec{y}_0, \mu), t, \nu) \quad (6.7)$$

Esta função é o fundamento do processo de ajuste de órbita. Ela nos permite calcular qual seria a observação no tempo t se a órbita do objeto fosse definida pela condição inicial \vec{y}_0 e pelos parâmetros μ e ν .

6.2 Método dos Mínimos Quadrados

No problema real de determinação de órbita, dispomos de um conjunto de m observações O_i (cada uma sendo um par $(\alpha_{\text{obs},i}, \delta_{\text{obs},i})$), realizadas nos instantes t_i . O objetivo é encontrar o melhor vetor de parâmetros \vec{x} que explica este conjunto de dados. Este vetor de parâmetros a ser ajustado, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, é tipicamente composto pelo vetor de estado inicial e, em casos mais complexos, por um subconjunto dos parâmetros dinâmicos ou cinemáticos que também são incertos:

$$\vec{x} = (\vec{y}_0, \mu_{\text{ajuste}}, \nu_{\text{ajuste}}) \quad (6.8)$$

Na maioria dos casos, os parâmetros μ e ν são considerados conhecidos (fixos), e o ajuste é realizado apenas sobre as seis componentes do estado inicial \vec{y}_0 , de modo que $n = 6$.

O **resíduo**, ξ_i , para a i -ésima observação, é a diferença vetorial entre o valor observado O_i e o valor calculado $C(t_i; \vec{x})$ usando um dado vetor de parâmetros \vec{x} :

$$\xi_i(\vec{x}) = O_i - C(t_i; \vec{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_{\text{obs},i} - \alpha_{\text{calc},i}(\vec{x}) \\ \delta_{\text{obs},i} - \delta_{\text{calc},i}(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

O objetivo do processo de ajuste é encontrar o vetor de parâmetros \vec{x}^* , denominado **órbita nominal**, que minimiza o tamanho agregado do vetor de todos os resíduos, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$.

6.2.1 Função de Custo e a Órbita Nominal

Se os erros de medição inerentes às observações O_i forem independentes e seguirem uma distribuição normal com média zero, o princípio da máxima verossimilhança da estatística leva diretamente ao **Método dos Mínimos Quadrados**. A função de custo $Q(\vec{x})$, também conhecida como χ^2 (qui-quadrado), é definida como a soma ponderada dos quadrados dos resíduos:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \xi_i^T W_i \xi_i \quad (6.10)$$

onde W_i é a **matriz de peso** da i -ésima observação. Esta matriz é a inversa da matriz de covariância da observação, $W_i = \Sigma_i^{-1}$, que quantifica a incerteza da medição. Se os erros em ascensão reta e declinação forem independentes, com

desvios padrão $\sigma_{\alpha,i}$ e $\sigma_{\delta,i}$, respectivamente, a matriz de covariância é diagonal, $\Sigma_i = \text{diag}(\sigma_{\alpha,i}^2, \sigma_{\delta,i}^2)$, e a função de custo assume a forma mais familiar:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \left[\frac{(\alpha_{\text{obs},i} - \alpha_{\text{calc},i}(\vec{x}))^2}{\sigma_{\alpha,i}^2} + \frac{(\delta_{\text{obs},i} - \delta_{\text{calc},i}(\vec{x}))^2}{\sigma_{\delta,i}^2} \right] \quad (6.11)$$

A órbita nominal, \vec{x}^* , é o vetor de parâmetros que minimiza esta função de custo:

$$\vec{x}^* = \arg \min_{\vec{x}} Q(\vec{x}) \quad (6.12)$$

6.2.2 Correção Diferencial

A função de previsão $C(t_i; \vec{x})$ é uma função altamente não-linear de \vec{x} , uma vez que envolve a integração numérica da equação de movimento (Equação (6.3)). Consequentemente, a minimização de $Q(\vec{x})$ não pode ser resolvida analiticamente encontrando as raízes de $\nabla Q = 0$. A solução é um processo iterativo conhecido como **correção diferencial**, que se enquadra na classe mais ampla de métodos de Newton-Gauss.

O processo é o seguinte:

1. **Palpite Inicial:** Inicia-se com uma **órbita preliminar**, \vec{x}_k (com $k = 0$ para a primeira iteração), que é uma estimativa inicial para a solução.

2. **Linearização:** O problema é linearizado em torno da estimativa atual \vec{x}_k . O vetor de resíduos $\xi(\vec{x})$ é aproximado por sua expansão de Taylor de primeira ordem:

$$\xi(\vec{x}) \approx \xi(\vec{x}_k) + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}_k} (\vec{x} - \vec{x}_k) \quad (6.13)$$

Definindo a correção a ser encontrada como $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_k$, e a **matriz de design** (ou Jacobiana dos resíduos) como $B = -\frac{\partial \xi}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial C}{\partial \vec{x}}$, a equação linearizada torna-se:

$$\xi(\vec{x}) \approx \xi_k - B_k \Delta \vec{x} \quad (6.14)$$

A matriz B_k , de dimensões $(2m \times n)$, contém as derivadas parciais das observações calculadas em relação a cada um dos n parâmetros de ajuste, avaliadas em \vec{x}_k . Por exemplo, uma de suas entradas é $\frac{\partial \alpha_{\text{calc},i}}{\partial x_0}$. O cálculo desta matriz é a etapa computacionalmente mais intensiva do processo, exigindo a integração das **equações variacionais**.

3. **Minimização do Problema Linearizado:** Substituindo a aproximação linear na função de custo, obtemos uma forma quadrática em $\Delta \vec{x}$: $Q(\Delta \vec{x}) = (\xi_k - B_k \Delta \vec{x})^T W (\xi_k - B_k \Delta \vec{x})$. A condição de mínimo, $\frac{\partial Q}{\partial (\Delta \vec{x})} = 0$, leva às **equações normais** do problema de mínimos quadrados linear:

$$(B_k^T W B_k) \Delta \vec{x}_k = B_k^T W \xi_k \quad (6.15)$$

4. **Cálculo da Correção:** A correção $\Delta \vec{x}_k$ é obtida resolvendo este sistema linear. A matriz $C_k = B_k^T W B_k$ é a **matriz de informação** (ou matriz das equações normais), de dimensões $(n \times n)$.

$$\Delta \vec{x}_k = (B_k^T W B_k)^{-1} B_k^T W \zeta_k = C_k^{-1} (B_k^T W \zeta_k) \quad (6.16)$$

5. **Atualização:** A estimativa da órbita é atualizada: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta \vec{x}_k$.
6. **Iteração:** O processo é repetido (retornando ao passo 2 com a nova estimativa \vec{x}_{k+1}) até que a norma da correção, $\|\Delta \vec{x}_k\|$, seja suficientemente pequena, indicando que o processo convergiu para a solução de mínimos quadrados.

O resultado final, $\vec{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k$, é a órbita nominal que melhor se ajusta ao conjunto completo de observações.

6.2.3 Região de Confiança e Matriz de Covariância

A órbita nominal \vec{x}^* representa a solução de máxima verossimilhança, mas as incertezas inerentes às observações implicam que a órbita verdadeira não é um ponto único, mas está em uma região de probabilidade em torno de \vec{x}^* . A teoria estatística do método dos mínimos quadrados fornece uma ferramenta poderosa para caracterizar esta região de incerteza.

A **matriz de covariância** da solução estimada \vec{x}^* , denotada por Γ , é dada pela inversa da matriz de informação, avaliada na solução final:

$$\Gamma = C^{-1} = (B^T W B)^{-1} \quad (6.17)$$

Esta matriz simétrica e positiva definida, de dimensões $(n \times n)$, é muito importante para a análise. Os elementos na diagonal, Γ_{ii} , representam as variâncias (σ_i^2) dos parâmetros de ajuste x_i . Os elementos fora da diagonal, Γ_{ij} , representam as covariâncias entre os parâmetros x_i e x_j , indicando como o erro em um parâmetro está correlacionado com o erro em outro.

Geometricamente, a matriz de covariância Γ define um **elipsoide de confiança** no espaço de parâmetros \mathbb{R}^n , centrado na órbita nominal \vec{x}^* . A equação deste elipsoide, para um determinado nível de confiança, é dada por:

$$(\vec{x} - \vec{x}^*)^T \Gamma^{-1} (\vec{x} - \vec{x}^*) \leq \Delta Q \quad (6.18)$$

onde ΔQ é um limiar determinado pela distribuição estatística χ^2 com n graus de liberdade, correspondente ao nível de confiança desejado (e.g., $1-\sigma$, $3-\sigma$).

Esta região de confiança, Z , contém o conjunto de todas as órbitas possíveis que são estatisticamente consistentes com as observações e suas incertezas. É a partir da amostragem de vetores de estado dentro desta região que se realiza a análise de risco de impacto, através da geração de **Asteroides Virtuais (VAs)**, como discutido no Capítulo 5. Cada VA é uma órbita retirada desta distribuição de probabilidade, e sua propagação no futuro permite mapear a evolução da incerteza e calcular a probabilidade de colisão.

6.3 Problema da Órbita Preliminar

O método de correção diferencial descrito na Seção 6.2.2 é muito preciso, mas possui um pré-requisito : ele requer uma estimativa inicial, \vec{x}_0 , que seja boa o suficiente para garantir a convergência do processo iterativo. A região de convergência

do método de Newton-Gauss pode ser pequena, e um palpite inicial muito distante da solução verdadeira pode levar à divergência ou à convergência para um mínimo local espúrio. A tarefa de obter esta primeira estimativa viável é o **problema da determinação de órbita preliminar** (IOD, *Initial Orbit Determination*).

Os métodos de IOD são projetados para encontrar uma órbita a partir do número mínimo de informações, tipicamente três observações astrométricas (α, δ) em três instantes distintos. Os dois métodos clássicos que formam a base da IOD, desenvolvidos por Pierre-Simon de Laplace e Carl Friedrich Gauss, serão explorados em detalhe nos capítulos posteriores (Laplace, 1796; Laplace, 1799; Gauss, 1809). Suas abordagens, embora partindo dos mesmos dados, são conceitualmente distintas:

- O **Método de Laplace** é um método essencialmente diferencial. Ele busca determinar a posição \vec{r} e a velocidade \vec{v} no instante da observação central (t_2) expressando-os em termos das derivadas temporais do vetor de linha de visada, $\hat{\rho}$. As derivadas $\dot{\hat{\rho}}$ e $\ddot{\hat{\rho}}$ são estimadas numericamente a partir das três observações discretas. O método é analiticamente elegante, mas numericamente sensível a erros observacionais, especialmente quando o arco de tempo entre as observações é curto.
- O **Método de Gauss** é um método geométrico-dinâmico. A genialidade de Gauss foi evitar o cálculo explícito de derivadas. Ele utilizou a propriedade de que o movimento de dois corpos é coplanar, o que implica que os vetores de posição heliocêntricos do objeto nos três instantes de observação, $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, são coplanares. Esta condição, combinada com a Segunda Lei de Kepler (que relaciona as áreas varridas aos intervalos de tempo), permite formular

um sistema de equações para as distâncias heliocêntricas. O método é notavelmente mais robusto para os arcos curtos típicos de descobertas de asteroides.

Ambos os métodos, ao serem aplicados sob a suposição simplificada de movimento de dois corpos, inevitavelmente levam à necessidade de encontrar as raízes de uma equação polinomial de alto grau (tipicamente oitavo grau para o método de Gauss) para uma das distâncias desconhecidas (heliocêntrica ou geocêntrica). A existência de múltiplas raízes reais e positivas introduz uma ambiguidade: várias soluções matemáticas podem surgir, das quais apenas uma (ou, em alguns casos, nenhuma) corresponde à órbita fisicamente correta. A discriminação entre estas soluções é um passo importante da IOD.

Capítulo 7

Método de Laplace

No capítulo anterior, estabelecemos o formalismo matemático para o problema de determinação de órbita, destacando a necessidade de uma estimativa inicial — uma órbita preliminar — para que o robusto método de correção diferencial possa convergir para a solução de mínimos quadrados. Este capítulo se aprofunda no primeiro método historicamente rigoroso desenvolvido para este fim: o Método de Laplace, concebido em 1780. A abordagem de Laplace é fundamentalmente dinâmica, pois busca inferir o estado cinemático completo de um corpo celeste — sua posição e velocidade — a partir das derivadas temporais de sua posição angular observada, conectando-as diretamente à aceleração gravitacional prevista pela lei de Newton.

O método é projetado para resolver o problema da determinação de órbita inicial utilizando o número mínimo de informações: três observações astrométricas, cada uma consistindo em um par de coordenadas angulares (ascensão reta,

α , e declinação, δ), realizadas em três instantes de tempo distintos. O objetivo é determinar o vetor de estado completo, (\vec{r}, \vec{v}) , no instante da observação central, t_2 . A elegância do método está em sua capacidade de transformar um problema geometricamente subdeterminado em um sistema de equações solúvel, culminando em uma única equação polinomial para a distância heliocêntrica do objeto. Este capítulo detalhará a dedução matemática completa do método, desde seus fundamentos geométricos até a análise de suas soluções e limitações práticas.

7.1 Geometria e Cinemática da Observação

A formulação do Método de Laplace é construída sobre a relação vetorial que conecta o observador, o objeto observado e o corpo central do sistema, dentro de um referencial inercial heliocêntrico. O referencial heliocêntrico equatorial médio (J2000.0) constitui o sistema de coordenadas padrão para este tipo de problema, no qual as posições são medidas a partir do centro do Sol, e os eixos apontam em direções fixas com respeito ao espaço inercial.

Sejam os seguintes vetores de posição definidos em um instante de tempo t (ilustrados na Figura 7.1):

- $\vec{R}(t)$: O vetor de posição heliocêntrico do observatório. Este vetor é conhecido com precisão a partir de efemérides planetárias (para a Terra) e modelos de rotação terrestre, permitindo transformações entre diferentes sistemas de coordenadas. O módulo deste vetor é $R = \|\vec{R}\|$, tipicamente próximo a 1 unidade astronômica (UA) para observatórios terrestres.

- $\vec{r}(t)$: O vetor de posição heliocêntrico do objeto (por exemplo, um asteroide), que se deseja determinar. O módulo é $r = \|\vec{r}\|$, cuja determinação é o objetivo primário do método.
- $\rho(t)$: O vetor de posição topocêntrico do objeto, medido a partir do observatório na direção da linha de visada. O módulo é $\rho = \|\rho\|$, representando a distância entre o observador e o objeto.

Estes três vetores formam um triângulo fechado no espaço, descrito pela relação geométrica fundamental:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \rho(t) \quad (7.1)$$

Esta equação traduz uma simples composição vetorial: a posição heliocêntrica do objeto é obtida adicionando-se a posição topocêntrica à posição heliocêntrica do observador. A Eq. (7.1) é uma restrição cinemática que deve ser satisfeita em todos os instantes de observação.

O maior desafio no problema está no fato de que o vetor ρ não é medido em sua totalidade. As observações astrométricas, realizadas por telescópios, fornecem exclusivamente a direção angular do objeto no céu, não sua distância. Esta direção é representada pelo versor unitário $\hat{\rho}$, cujas componentes no referencial equatorial são funções diretas das coordenadas angulares observadas, a ascensão reta (α) e a declinação (δ):

$$\rho(t) = \rho(t)\hat{\rho}(t) \quad (7.2)$$

A transformação das coordenadas angulares observadas para o versor unitário é dada explicitamente por:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \cos \delta(t) \cos \alpha(t) \\ \cos \delta(t) \sin \alpha(t) \\ \sin \delta(t) \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Esta transformação assume o referencial equatorial médio, no qual o plano fundamental é o equador celeste, e a origem angular $\alpha = 0$ aponta na direção do ponto vernal (equinócio vernal de 2000.0 para J2000.0). A magnitude $\rho = \|\rho\|$, que corresponde à distância topocêntrica entre o observador e o objeto, permanece como uma das principais incógnitas a ser determinada.

Da Eq. (7.1), podemos expressar a posição heliocêntrica do objeto em termos das quantidades conhecidas e das incógnitas escalares:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \rho(t)\hat{\rho}(t) \quad (7.4)$$

O objetivo do Método de Laplace é determinar o vetor de estado de seis dimensões, (\vec{r}, \vec{v}) , no instante da observação central, t_2 . Consequentemente, necessitamos obter tanto a posição \vec{r} quanto a velocidade \vec{v} .

A velocidade heliocêntrica é obtida pela diferenciação temporal da Eq. (7.4), aplicando a regra do produto:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \quad (7.5)$$

Diferenciando o termo $\rho = \rho\hat{\rho}$, aplicamos a regra do produto:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\hat{\rho}} \quad (7.6)$$

Assim, a velocidade heliocêntrica escreve-se como:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{R}}(t) + \dot{\rho}(t)\hat{\rho}(t) + \rho(t)\dot{\hat{\rho}}(t) \quad (7.7)$$

Nestas equações, avaliadas no instante central t_2 , o estado do observatório ($\vec{R}, \dot{\vec{R}}$) é conhecido com alta precisão a partir de efemérides precisas. As quantidades angulares (α, δ) e suas primeiras derivadas temporais ($\dot{\alpha}, \dot{\delta}$) são, em princípio, acessíveis a partir das três observações através de ajustes polinomiais. Isto permite computar $\hat{\rho}$ e $\dot{\hat{\rho}}$.

Consequentemente, a determinação completa do vetor de estado (\vec{r}, \vec{v}) se resume a encontrar os valores de duas incógnitas escalares no instante t_2 :

1. A distância topocêntrica $\rho(t_2)$
2. A velocidade radial topocêntrica $\dot{\rho}(t_2)$

A aceleração radial $\ddot{\rho}(t_2)$ é, em princípio, uma terceira quantidade desconhecida que surge quando diferenciamos novamente; contudo, a metodologia

de Laplace permite relacioná-la às primeiras duas através de restrições dinâmicas, como será demonstrado a seguir.

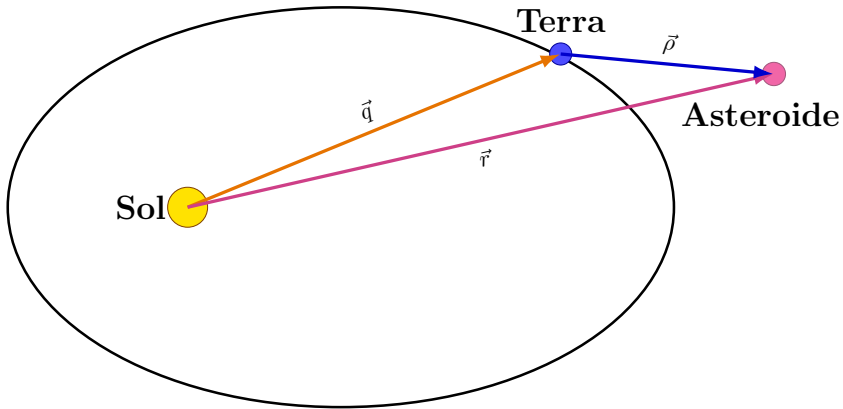


Figura 7.1: Configuração geométrica do Método de Laplace. O vetor de posição heliocêntrico do asteroide \vec{r} é a soma vetorial do vetor de posição heliocêntrico do observatório \vec{R} e do vetor de posição topocêntrico do asteroide $\vec{\rho}$. Os três vetores formam um triângulo fechado no espaço tridimensional.

7.2 Equação de Laplace

O Método de Laplace fundamenta-se num confronto direto entre a cinemática do movimento observado e a dinâmica do movimento governado pela gravidade. O ponto de conexão é a segunda derivada temporal do vetor de posição heliocêntrico do objeto, $\ddot{\vec{r}}$, que é uma quantidade que pode ser expressa tanto em termos observacionais quanto em termos dinâmicos.

7.2.1 Expressão Cinemática e Dinâmica da Aceleração

A expressão para a aceleração heliocêntrica é obtida diferenciando-se a Eq. (7.7) mais uma vez em relação ao tempo. Aplicando a regra do produto aos termos individuais, temos

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho}) + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\hat{\rho}}) \quad (7.8)$$

Derivando os termos

$$\frac{d}{dt}(\dot{\rho}\hat{\rho}) = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} \quad (7.9)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho\dot{\hat{\rho}}) = \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} \quad (7.10)$$

Combinando (7.8) com (7.9) e (7.10)

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} \quad (7.11)$$

e agrupando com fatores $\dot{\rho}$, temos

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} \quad (7.12)$$

Esta equação expressa a aceleração heliocêntrica do objeto exclusivamente em termos de quantidades conhecidas (as derivadas do estado do observatório, $\ddot{\vec{R}}$), quantidades observáveis (as derivadas da linha de visada, $\hat{\rho}$, $\dot{\hat{\rho}}$, $\ddot{\hat{\rho}}$), e três incógnitas escalares: a distância topocêntrica ρ , a velocidade radial $\dot{\rho}$ e a aceleração radial $\ddot{\rho}$.

Por outro lado, a dinâmica do sistema, sob a aproximação do Problema de Dois Corpos, no qual o sistema é dominado pela massa do Sol, M_{\odot} , dita que a aceleração heliocêntrica do objeto deve obedecer à Lei da Gravitação Universal de Newton. Utilizando o parâmetro gravitacional padrão $\mu = GM_{\odot}$, onde G é a constante de gravitação universal, a aceleração dinâmica é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \quad (7.13)$$

Nesta equação, $r = \|\vec{r}\|$ é a magnitude do vetor posição heliocêntrico. A aceleração depende apenas da posição \vec{r} e de sua magnitude, refletindo o caráter conservativo e central da força gravitacional solar.

Igualando as expressões cinemática (7.12) e dinâmica (7.13) para a aceleração $\ddot{\vec{r}}$

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \quad (7.14)$$

e substituindo $\vec{r} = \vec{R} + \rho\hat{\rho}$ da (7.4) no lado direito, chegamos na expressão

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{R} + \rho\hat{\rho}) \quad (7.15)$$

Expandindo o lado direito

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{R} - \frac{\mu\rho}{r^3}\hat{\rho} \quad (7.16)$$

e reagrupando os termos para isolar as incógnitas escalares no lado esquerdo, temos

$$\ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}} = -\ddot{\vec{R}} - \frac{\mu}{r^3}\vec{R} - \frac{\mu\rho}{r^3}\hat{\rho} \quad (7.17)$$

Esta é a **equação vetorial de Laplace**, uma única equação no espaço tridimensional que contém as três incógnitas escalares ρ , $\dot{\rho}$ e $\ddot{\rho}$, relembrando que a distância heliocêntrica r é ela mesma uma função de ρ por meio da Eq. (7.4). A beleza da solução de Laplace está na maneira como esta equação é manipulada para isolar sistematicamente cada uma das incógnitas.

O passo seguinte é tomar o produto triplo escalar (também denominado produto escalar triplo ou produto misto) da Eq. (7.17) com dois vetores que formem uma base ortogonal ao vetor $\hat{\rho}$. Esta operação projeta a equação vetorial em uma direção ortogonal ao plano definido por $\hat{\rho}$ e $\dot{\hat{\rho}}$, eliminando efetivamente os termos que contém as incógnitas $\ddot{\rho}$ e $\dot{\rho}$, deixando apenas termos que envolvem ρ .

A escolha mais natural é aplicar a operação $[\cdot(\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})]$ a ambos os lados da Eq. (7.17). Recordemos que o produto vetorial $\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}$ produz um vetor perpendicular ao plano contido por $\hat{\rho}$ e $\dot{\hat{\rho}}$. O produto escalar triplo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ pode ser reescrito como o determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (7.18)$$

Para o lado esquerdo (cinemático) da Eq. (7.17)

$$(\ddot{\rho}\hat{\rho} + 2\dot{\rho}\dot{\hat{\rho}} + \rho\ddot{\hat{\rho}}) \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) \quad (7.19)$$

$$= \ddot{\rho}[\hat{\rho} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] + 2\dot{\rho}[\dot{\hat{\rho}} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] + \rho[\ddot{\hat{\rho}} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] \quad (7.20)$$

Os dois primeiros termos são identicamente nulos, pois o produto escalar triplo de vetores em que dois deles são linearmente dependentes é zero:

$$\hat{\rho} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) = 0 \quad (\text{pois } \hat{\rho} \text{ é ortogonal a } \hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) \quad (7.21)$$

$$\dot{\hat{\rho}} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) = 0 \quad (\text{pois } \dot{\hat{\rho}} \text{ é ortogonal a } \hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) \quad (7.22)$$

Resta apenas o terceiro termo. Utilizando a propriedade cíclica do determinante:

$$\ddot{\hat{\rho}} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) = -\dot{\hat{\rho}} \cdot (\dot{\hat{\rho}} \times \ddot{\hat{\rho}}) = -\det(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}, \ddot{\hat{\rho}}) \quad (7.23)$$

Definindo $D = \det(\hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}, \ddot{\hat{\rho}})$ como o **determinante observacional**, obtemos:

$$\text{Lado Esquerdo} = -\rho D \quad (7.24)$$

Este é um escalar que depende apenas das derivadas da linha de visada, todas calculáveis a partir das observações.

Para o lado direito (dinâmico) da Eq. (7.17):

$$\left(-\ddot{\vec{R}} - \frac{\mu}{r^3}\vec{R} - \frac{\mu\rho}{r^3}\hat{\rho}\right) \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) \quad (7.25)$$

$$= -\ddot{\vec{R}} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) - \frac{\mu}{r^3}[\vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] - \frac{\mu\rho}{r^3}[\hat{\rho} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] \quad (7.26)$$

O último termo desaparece novamente. Para os dois primeiros termos, note que a aceleração do observatório também é governada pela gravidade do Sol, por consistência com o modelo dinâmico do objeto. Assim:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{\mu}{R^3}\vec{R} \quad (7.27)$$

onde negligenciamos perturbações planetárias sobre a Terra. Substituindo:

$$\text{Lado Direito} = -\left(-\frac{\mu}{R^3}\vec{R}\right) \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}}) - \frac{\mu}{r^3}[\vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] \quad (7.28)$$

$$= \frac{\mu}{R^3}[\vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] - \frac{\mu}{r^3}[\vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] \quad (7.29)$$

$$= \mu\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})] \quad (7.30)$$

Definindo $D_R = \det(\vec{R}, \hat{\rho}, \dot{\hat{\rho}}) = \vec{R} \cdot (\hat{\rho} \times \dot{\hat{\rho}})$ como o **determinante solar**, obtemos:

$$\text{Lado Direito} = \mu \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) D_R \quad (7.31)$$

7.2.2 Equação Dinâmica Escalar de Laplace

Igualando os dois lados (7.24) e (7.31)

$$-\rho D = \mu \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) D_R \quad (7.32)$$

Reorganizando para isolar o termo com r :

$$\mu \frac{1}{r^3} D_R = \mu \frac{1}{R^3} D_R + \rho D \quad (7.33)$$

Dividindo por μD_R (assumindo $D_R \neq 0$, condição que será discutida):

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + \frac{D}{\mu D_R} \rho \quad (7.34)$$

Esta é a **equação dinâmica escalar de Laplace**, uma relação algébrica que conecta as duas distâncias desconhecidas, r e ρ , através de quantidades que são todas calculáveis a partir das observações no instante central t_2 e das posições e velocidades do observatório em efemérides planetárias.

A Eq. (7.34) reduz o sistema de três incógnitas escalares $(\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho})$ para uma relação simples entre duas delas. Contudo, isto não é ainda suficiente; necessitamos de uma segunda equação que relacione r e ρ de forma independente.

7.3 Segunda Equação: Geometria e a Lei dos Cossenos

A segunda equação que relaciona as distâncias heliocêntrica e topocêntrica provém diretamente da geometria do triângulo Sol-Observatório-Objeto, ilustrado na Figura 7.1. Os três vértices deste triângulo possuem distâncias bem definidas:

- Sol-Observatório: R (distância heliocêntrica do observatório)
- Observatório-Objeto: ρ (distância topocêntrica)
- Sol-Objeto: r (distância heliocêntrica do objeto)

A aplicação da lei dos cossenos a este triângulo fornece

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\angle R, \rho) \quad (7.35)$$

onde $\angle R, \rho$ é o ângulo entre os vetores \vec{R} e ρ . Exprimindo este ângulo em termos do produto escalar

$$\cos(\angle R, \rho) = \frac{\vec{R} \cdot \rho}{R\rho} = \frac{\vec{R} \cdot (\rho\hat{\rho})}{R\rho} = \frac{\vec{R} \cdot \hat{\rho}}{R} = \frac{1}{R}(\vec{R}\hat{\rho}) \cdot \hat{\rho} = \hat{R} \cdot \hat{\rho} \quad (7.36)$$

Definindo $\cos \epsilon = -\hat{R} \cdot \hat{\rho}$, onde ϵ é o ângulo de elongação, obtemos

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho(\cos \epsilon) \quad (7.37)$$

ou equivalentemente

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos \epsilon \quad (7.38)$$

A Eq. (7.38) é puramente geométrica e não contém qualquer consideração dinâmica. Ela relaciona r e ρ de forma quadrática.

7.4 Obtenção do Polinômio de Oitavo Grau

O sistema de duas equações não-lineares é composto pela equação dinâmica (7.34) e pela equação geométrica (7.38). A estratégia padrão é eliminar uma das variáveis para obter

Da (7.34), isolamos ρ

$$\frac{D}{\mu D_R} \rho = \frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \quad (7.39)$$

e multiplicamos ambos os lados por $\frac{\mu D_R}{D}$

$$\rho = \frac{\mu D_R}{D} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (7.40)$$

Esta expressão mostra que ρ é uma função de r , controlada pelo parâmetro $\frac{\mu D_R}{D}$. Substituindo a Eq. (7.40) em (7.38)

$$r^2 = R^2 + \left[\frac{\mu D_R}{D} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right]^2 + 2R \left[\frac{\mu D_R}{D} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right] \cos \epsilon \quad (7.41)$$

Expandindo o quadrado do segundo termo

$$r^2 = R^2 + \frac{\mu^2 D_R^2}{D^2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right)^2 + 2R \cos \epsilon \frac{\mu D_R}{D} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (7.42)$$

e multiplicando toda a equação por r^6 para eliminar denominadores, temos

$$r^8 = R^2 r^6 + \frac{\mu^2 D_R^2}{D^2} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^2 r^6 + 2R \cos \epsilon \frac{\mu D_R}{D} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) r^6 \quad (7.43)$$

Agora, usamos a expansão $\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^2 = 1 - 2\frac{r^3}{R^3} + \frac{r^6}{R^6}$, encontramos

$$r^8 = R^2 r^6 + \frac{\mu^2 D_R^2}{D^2} \left(r^6 - 2\frac{r^9}{R^3} + \frac{r^{12}}{R^6}\right) + 2R \cos \epsilon \frac{\mu D_R}{D} \left(r^6 - \frac{r^9}{R^3}\right) \quad (7.44)$$

que pode ser rearranjada em potências decrescentes de r

$$r^8 - R^2 r^6 - \frac{\mu^2 D_R^2}{D^2} r^6 + \text{termos de ordem inferior} = 0 \quad (7.45)$$

e que, após um caminho algébrico extenso, chega-se ao polinômio de grau 8 na forma padrão

$$r^8 - (R^2 + 2R\rho_0 \cos \epsilon + \rho_0^2) r^6 + \frac{2\mu R \rho_0 D_R}{D} \cdot r^3 + \frac{\mu^2 D_R^2}{D^2} = 0 \quad (7.46)$$

Mais precisamente, após manipulação algébrica completa, o polinômio toma a forma dada pela expressão

$$Ar^8 + Br^6 + Cr^3 + G = 0 \quad (7.47)$$

onde os coeficientes A, B, C, G são funções complexas das quantidades conhecidas no instante t_2 , a saber, as expressões

$$A = 1 \quad (7.48)$$

$$B = -(R^2 + 2\mu D_R/D \cdot \cos \epsilon + [\mu D_R/(DR^3)]^2) \quad (7.49)$$

$$C = 2\mu D_R(1/D + \text{termos de ordem superior}) \quad (7.50)$$

$$G = -[\mu D_R/D]^2 \quad (7.51)$$

A solução desta equação polinomial de oitavo grau fornece a distância heliocêntrica r no instante central t_2 .

7.5 Quantidades Observáveis a partir de Três Observações Discretas

O cálculo dos determinantes observacional D e solar D_R requer o conhecimento do vetor de linha de visada $\hat{\rho}$ e de suas duas primeiras derivadas temporais, $\dot{\hat{\rho}}$ e $\ddot{\hat{\rho}}$, no instante central t_2 . Estas quantidades derivadas são estimadas a partir das três observações discretas realizadas nos instantes t_1, t_2, t_3 , com medidas angulares (α_i, δ_i) para $i = 1, 2, 3$.

7.5.1 Ajuste Polinomial de Coordenadas Angulares

O procedimento padrão envolve o ajuste de um polinômio de segundo grau (equivalente a uma expansão de Taylor truncada) aos dados de ascensão reta e declinação separadamente. As coordenadas angulares são aproximadas como:

$$\alpha(t) \approx \alpha_2 + \dot{\alpha}_2(t - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_2(t - t_2)^2 \quad (7.52)$$

$$\delta(t) \approx \delta_2 + \dot{\delta}_2(t - t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\delta}_2(t - t_2)^2 \quad (7.53)$$

Estas são funções quadráticas de t , possuindo seis parâmetros desconhecidos: $\alpha_2, \dot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_2, \delta_2, \dot{\delta}_2, \ddot{\delta}_2$. Contudo, o valor de α_2 é fornecido diretamente pela observação no instante central, $\alpha_2 = \alpha(t_2)$; analogamente para δ_2 . Isto reduz o número de incógnitas a quatro: $\dot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_2, \dot{\delta}_2, \ddot{\delta}_2$.

A passagem de um sistema linear para os três pontos ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) permite resolver para $\dot{\alpha}_2$ e $\ddot{\alpha}_2$. Especificamente, defina $\tau_1 = t_1 - t_2 < 0$ e $\tau_3 = t_3 - t_2 > 0$ como os intervalos de tempo relativos ao instante central. Das Equações (7.52) avaliadas nos três instantes:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \dot{\alpha}_2\tau_1 + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_2\tau_1^2 \quad (7.54)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2 \quad (7.55)$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \dot{\alpha}_2\tau_3 + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_2\tau_3^2 \quad (7.56)$$

Das duas primeiras equações:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \dot{\alpha}_2\tau_1 + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}_2\tau_1^2 \quad (7.57)$$

Das duas últimas equações:

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \dot{\alpha}_2 \tau_3 + \frac{1}{2} \ddot{\alpha}_2 \tau_3^2 \quad (7.58)$$

Este é um sistema linear de duas equações em dois incógnitas. Resolvendo matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & \frac{\tau_1^2}{2} \\ \tau_3 & \frac{\tau_3^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_2 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_3 - \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

A inversa da matriz de coeficientes é:

$$\frac{1}{\tau_1 \frac{\tau_3^2}{2} - \tau_3 \frac{\tau_1^2}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\tau_3^2}{2} & -\frac{\tau_1^2}{2} \\ -\tau_3 & \tau_1 \end{bmatrix} = \frac{2}{\tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1)} \begin{bmatrix} \frac{\tau_3^2}{2} & -\frac{\tau_1^2}{2} \\ -\tau_3 & \tau_1 \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

Aplicando a inversa:

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\tau_3(\alpha_1 - \alpha_2) - \tau_1(\alpha_3 - \alpha_2)}{\tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1)} \quad (7.61)$$

$$\ddot{\alpha}_2 = \frac{2[(\alpha_1 - \alpha_2)\tau_3^2 - (\alpha_3 - \alpha_2)\tau_1^2]}{\tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1)^2} \quad (7.62)$$

De maneira idêntica, $\dot{\delta}_2$ e $\ddot{\delta}_2$ são obtidos a partir das coordenadas de declinação.

Com os coeficientes das Equações (7.52) e (7.53) determinados, calculam-se $\hat{\rho}_2$ e suas derivadas por diferenciação analítica da Eq. (7.3). A primeira derivada é obtida diferenciando cada componente:

$$\frac{d}{dt} \cos(\delta(t)) \cos(\alpha(t)) = -\sin(\delta)\dot{\delta} \cos(\alpha) - \cos(\delta) \sin(\alpha)\dot{\alpha} \quad (7.63)$$

$$\frac{d}{dt} \cos(\delta(t)) \sin(\alpha(t)) = -\sin(\delta)\dot{\delta} \sin(\alpha) + \cos(\delta) \cos(\alpha)\dot{\alpha} \quad (7.64)$$

$$\frac{d}{dt} \sin(\delta(t)) = \cos(\delta)\dot{\delta} \quad (7.65)$$

A segunda derivada segue por diferenciação repetida, resultando em expressões mais complexas que envolvem $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\delta}$, $\dot{\alpha}^2$, $\dot{\delta}^2$, $\dot{\alpha}\dot{\delta}$, etc.

Este passo de cálculo é especialmente sensível a erros observacionais. Quando o intervalo de tempo entre as observações é muito curto, as posições angulares do objeto no céu são quase colineares, tornando os versores $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$, $\hat{\rho}_3$ aproximadamente paralelos. Em tal situação, as segundas derivadas ($\ddot{\alpha}$, $\ddot{\delta}$) estimadas pelo ajuste polinomial são pequenas diferenças de quantidades muito próximas, resultando em amplificação de ruído. Isto constitui a principal limitação prática do Método de Laplace para arcos observacionais muito curtos.

Uma vez que $\hat{\rho}_2$, $\dot{\hat{\rho}}_2$, $\ddot{\hat{\rho}}_2$ são conhecidos numericamente, o determinante observacional é calculado como:

$$D = \det(\hat{\rho}_2, \dot{\hat{\rho}}_2, \ddot{\hat{\rho}}_2) \quad (7.66)$$

Mais explicitamente, em componentes cartesianas:

$$D = \begin{vmatrix} \hat{\rho}_{2,x} & \dot{\rho}_{2,x} & \ddot{\rho}_{2,x} \\ \hat{\rho}_{2,y} & \dot{\rho}_{2,y} & \ddot{\rho}_{2,y} \\ \hat{\rho}_{2,z} & \dot{\rho}_{2,z} & \ddot{\rho}_{2,z} \end{vmatrix} \quad (7.67)$$

O determinante solar é calculado de maneira similar:

$$D_R = \det(\vec{R}_2, \hat{\rho}_2, \dot{\rho}_2) = \begin{vmatrix} R_{2,x} & \hat{\rho}_{2,x} & \dot{\rho}_{2,x} \\ R_{2,y} & \hat{\rho}_{2,y} & \dot{\rho}_{2,y} \\ R_{2,z} & \hat{\rho}_{2,z} & \dot{\rho}_{2,z} \end{vmatrix} \quad (7.68)$$

Ambos os determinantes são escalares numéricos, únicos para cada problema específico.

7.6 Recuperação do Vetor de Estado

A resolução numérica da Eq. (7.47), que é uma equação polinomial de oitavo grau, pode produzir até oito raízes no corpo complexo \mathbb{C} . Apenas as raízes reais e positivas são fisicamente significativas, correspondendo a possíveis distâncias heliocêntricas reais do objeto. Para cada raiz válida r_j , com j indexando as múltiplas soluções:

1. **Cálculo da Distância Topocêntrica:** A distância topocêntrica ρ_j é calculada diretamente da equação dinâmica escalar Eq. (7.40):

$$\rho_j = \frac{\mu D_R}{D} \left(\frac{1}{r_j^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (7.69)$$

Apenas valores $\rho_j > 0$ são fisicamente aceitáveis.

2. **Construção do Vetor Posição Heliocêntrico:** A partir da Eq. (7.4):

$$\vec{r}_j = \vec{R} + \rho_j \hat{\rho} \quad (7.70)$$

Verifica-se que $\|\vec{r}_j\| = r_j$ como consistência.

3. **Determinação da Velocidade Radial:** A velocidade radial topocêntrica $\dot{\rho}_j$ é a última incógnita escalar a ser encontrada. Retorna-se à equação vetorial de Laplace (7.17) e projeta-se em uma direção diferente, tipicamente na direção do movimento aparente no céu, $\hat{\dot{\rho}}$. Tomando o produto escalar com $\hat{\dot{\rho}}$:

$$\ddot{\rho}(\hat{\rho} \cdot \hat{\dot{\rho}}) + 2\dot{\rho}(\dot{\hat{\rho}} \cdot \hat{\dot{\rho}}) + \rho(\ddot{\hat{\rho}} \cdot \hat{\dot{\rho}}) = \left[-\ddot{R} - \frac{\mu}{r^3}(\vec{R} + \rho\hat{\rho}) \right] \cdot \hat{\dot{\rho}} \quad (7.71)$$

Esta é uma equação linear em $\dot{\rho}$ (desde que a segunda derivada $\ddot{\rho}$ possa ser eliminada através de projeções adicionais). Resolvendo:

$$\dot{\rho}_j = \frac{\text{RHS}}{2\|\hat{\dot{\rho}}\|^2} \quad (7.72)$$

4. **Construção do Vetor Velocidade Heliocêntrico:** A partir da Eq. (7.7):

$$\vec{v}_j = \dot{\vec{R}} + \dot{\rho}_j \hat{\rho} + \rho_j \dot{\hat{\rho}} \quad (7.73)$$

5. **Verificação de Consistência Orbital:** O par (\vec{r}_j, \vec{v}_j) constitui uma órbita preliminar candidata. Diversos testes de consistência podem ser aplicados: cálculo da energia orbital $\mathcal{E} = v_j^2/2 - \mu/r_j$, cálculo do momento angular orbital $\vec{L}_j = \vec{r}_j \times \vec{v}_j$, análise do tipo orbital (ligado vs. hiperbólico), etc.

7.7 Multiplicidade de Soluções: Teoria de Charlier

Uma característica intrínseca do Método de Laplace é a potencial existência de múltiplas soluções fisicamente viáveis. Esta multiplicidade não é um artefato numérico, mas uma propriedade do problema matemático. Charlier, em 1910, forneceu uma análise qualitativa sistematizada da ocorrência e número de soluções para o polinômio de oitavo grau de Laplace.

7.7.1 Análise de Charlier: Teoria dos Sinais e Número de Raízes Positivas

O polinômio de oitavo grau em (7.47), após reorganização adequada, pode ser expresso como:

$$r^8 - (R^2 + 2R\rho \cos \epsilon + \rho^2) r^6 + 2\mu R\rho \frac{D_R}{D} r^3 + \left(\mu \frac{D_R}{D} \right)^2 = 0 \quad (7.74)$$

Uma análise mais precisa, seguindo a nomenclatura de Charlier, reescreve este polinômio em termos de um parâmetro adimensional C , o qual codifica a relação entre as duas distâncias. Define-se:

$$C = \frac{\mu D_R}{DR^3} \quad (7.75)$$

Como parâmetro intermediário. O polinômio toma então a forma reduzida:

$$P(r) = r^8 - (1 + 2\frac{q}{R} \cos \epsilon + \frac{q^2}{R^2})r^6 + \dots = 0 \quad (7.76)$$

onde $q = q(C, r)$ é a relação entre a distância topocêntrica e a heliocêntrica, em unidades de R . A análise do número de raízes reais e positivas envolve a regra de Descartes sobre sinais de coeficientes.

Charlier demonstrou que o número de soluções depende fundamentalmente da posição do objeto no espaço, quantificada pelo parâmetro C . Especificamente, o plano (ρ, r) , com o Sol em $(0, 0)$ e o observador em $(R, 0)$, é dividido em regiões por uma curva limite, a qual é definida pelo critério de mudança de número de raízes:

$$\text{Curva Limite de Charlier: } 4 - 3\frac{q}{R} \cos \phi = \frac{q^3}{r^3} \quad (7.77)$$

onde ϕ é o ângulo heliocêntrico (coordenada angular polar com origem no Sol).

De acordo com a análise de Charlier:

- Em certas regiões (denominadas regiões de $n = 1$), existe exatamente uma solução real positiva.
- Em outras regiões (regiões de $n = 2$), existem exatamente duas soluções reais positivas.
- Em regiões especiais perto da órbita terrestre, podem ocorrer até três soluções.

A Figura 7.2 ilustra as curvas de nível de $C(\rho, r)$ no plano (ρ, r) , mostrando as fronteiras entre regiões de diferente número de soluções.

Quando múltiplas soluções são encontradas, torna-se necessário aplicar critérios físicos ou observacionais para selecionar a solução mais plausível. Os critérios comumente empregados incluem:

1. **Continuidade Temporal:** Se uma órbita preliminar foi previamente determinada, a nova solução deve estar próxima em espaço de fase, a menos que o objeto tenha sido perdido e redescoberto.
2. **CrITÉRIOS de Movimento Próprio:** Velocidades angulares no céu muito elevadas ($\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ muito grandes em valor absoluto) indicam objetos próximos, sugerindo certos intervalos de ρ .
3. **Análise de Curvatura Orbital:** Asteroides em órbitas muito excêntricas ou hiperbólicas apresentam assinaturas espectrais e dinâmicas distintas.

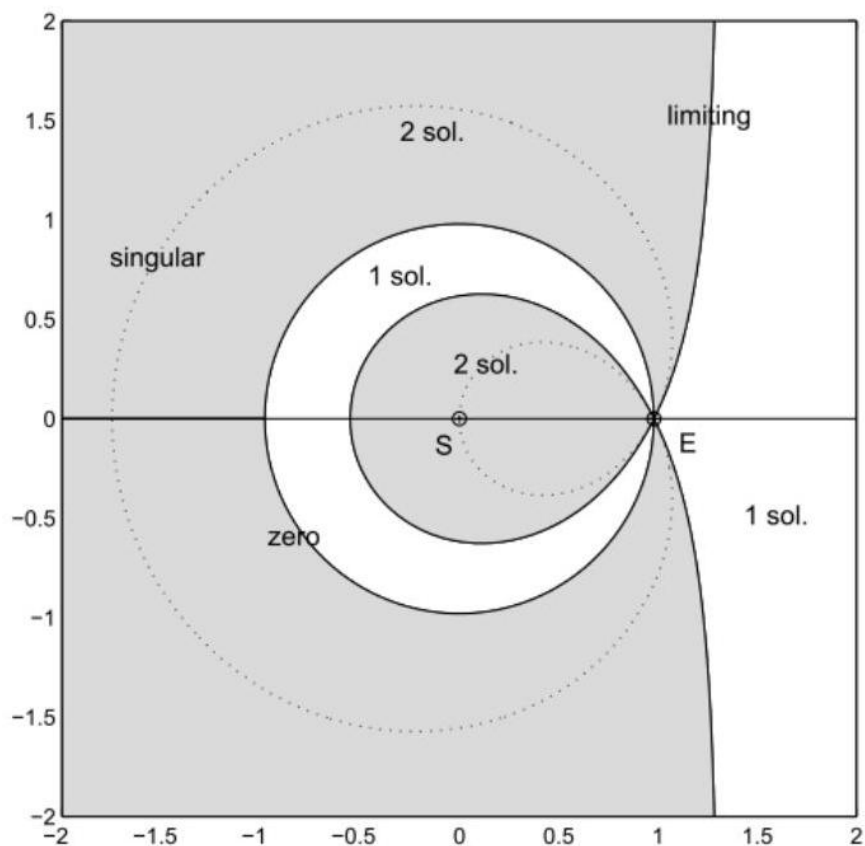


Figura 7.2: Curvas de nível de $C(r, \rho)$ em coordenadas retangulares. A curva limite de Charlier e o círculo de raio heliocêntrico da Terra divisível o plano de referência em quatro regiões distintas, duas possuindo uma solução única e duas possuindo duas soluções. Os eixos estão em unidades astronômicas (UA). A região próxima à órbita terrestre é aquela de particular interesse para asteroides próximos à Terra.

4. **Consistência Fotométrica:** O brilho aparente do objeto relaciona-se com sua magnitude absoluta e sua distância; comparações com catálogos podem descartar soluções fisicamente inviáveis.

7.8 Limitações do Método

Embora o Método de Laplace seja matematicamente elegante e historicamente importante, ele possui limitações que impedem seu uso como o método padrão em algumas aplicações de determinação de órbita.

7.8.1 Sensibilidade

A principal desvantagem do Método de Laplace é sua alta sensibilidade a problemas observacionais, especialmente quando o arco de tempo coberto pelas três observações é curto. Em tais cenários ($\Delta t = t_3 - t_1 \ll \text{período orbital}$), as posições angulares do objeto no céu são quase colineares, e a determinação das segundas derivadas ($\ddot{\alpha}, \ddot{\delta}$) a partir do ajuste polinomial torna-se numericamente instável.

Consideremos um exemplo numérico: suponha que três observações de um asteroide sejam feitas com precisão angular de 0.01 arcsegundos (aproximadamente os limites de telescópios ópticos modernos). Se o intervalo entre observações é $\Delta t = 1$ hora, então as mudanças em posição angular entre observações sequenciais são de aproximadamente 0.1 arcsegundos. A mudança na primeira derivada (mudança de velocidade angular) é de aproximadamente 0.01 arcsegundos por hora ao quadrado, e a segunda derivada (aceleração angular) é da ordem de 0.001 arcsegundos por hora ao quadrado. Nesta escala, erros de medição de

apenas 0.001 arcsegundos (ainda bem dentro da precisão observacional típica) podem produzir incertezas relativas de 10-100% nas segundas derivadas.

7.8.2 Instabilidade Numérica

O problema aqui está no ajuste polinomial das coordenadas angulares Eqs. (7.52) e (7.53). Para resolver o sistema linear que extrai os coeficientes de derivadas, é necessário calcular a inversa de uma matriz cujos elementos envolvem diferenças de potências de τ_1 e τ_3 :

$$\det \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_1^2/2 \\ \tau_3 & \tau_3^2/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1) = \frac{1}{2} \tau_1 \tau_3 \Delta t \quad (7.78)$$

Para observações igualmente espaçadas, $\tau_1 = -\Delta t/2$ e $\tau_3 = \Delta t/2$, de modo que:

$$\det = \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{\Delta t}{2} \right) (\Delta t) = -\frac{(\Delta t)^3}{8} \quad (7.79)$$

O número de condição desta matriz cresce como $(\Delta t)^{-3}$, significando que para intervalos de tempo pequenos, a matriz torna-se mal-condicionada, e pequenas perturbações na entrada provenientes dos problemas observacionais produzem grandes perturbações na solução.

Capítulo 8

Método de Gauss

O método de Gauss é um procedimento para determinar a órbita heliocêntrica de um corpo celeste a partir de um mínimo de três observações astrométricas. Cada observação, no instante t_i , consiste em um par de coordenadas angulares (ascensão reta α_i e declinação δ_i), que definem a direção do objeto no céu.

A geometria do problema é descrita pela relação vetorial entre o observador, o objeto e o Sol. No instante t_i , o vetor posição heliocêntrico do objeto, \vec{r}_i , é a soma do vetor posição heliocêntrico do observador, \vec{q}_i , com o vetor posição topocêntrico do objeto, $\vec{\rho}_i$:

$$\vec{r}_i = \vec{q}_i + \vec{\rho}_i. \quad (8.1)$$

O vetor $\vec{\rho}_i$ pode ser expresso como o produto de sua magnitude, a distância topocêntrica ρ_i , e seu versor, $\hat{\rho}_i$, que corresponde à direção observada. A Equação (8.1)

estabelece o vínculo geométrico fundamental do método, ilustrado na Figura 8.1 para os três instantes de observação.

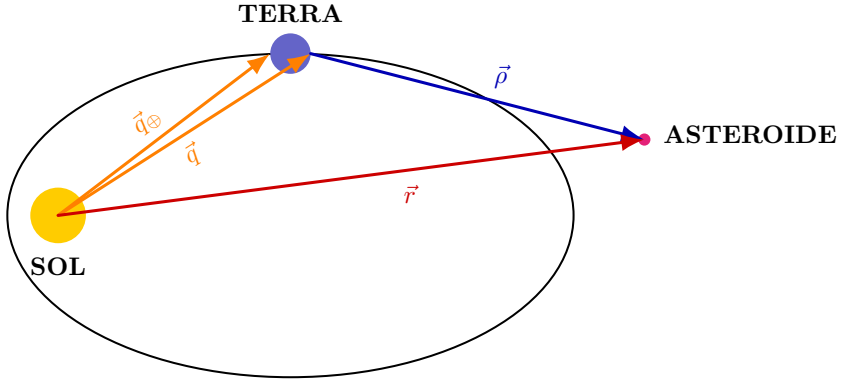


Figura 8.1: Configuração geométrica do método de Gauss. A relação vetorial $\vec{r}_i = \vec{q}_i + \vec{\rho}_i$ é mostrada para cada instante de observação t_i .

8.1 Coplanaridade Orbital

No contexto do problema de dois corpos, a dinâmica do sistema é governada pelas forças gravitacionais entre o Sol e o objeto observado. Uma consequência desta dinâmica está na conservação do momento angular orbital, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$. Aquela quantidade permanece constante ao longo do movimento, o que implica que os vetores posição $\vec{r}(t)$ descrevem trajetórias que se situam exclusivamente dentro de um plano fixo no espaço inercial, denominado plano orbital.

O intervalo temporal que separa as três observações, $\Delta t = t_3 - t_1$, é tipicamente muito reduzido comparativamente ao período orbital do objeto, P_{orb} . Esta condição, expressa por $\Delta t \ll P_{\text{orb}}$, assegura que a mudança na orientação

orbital durante o intervalo de observação é negligenciável. Consequentemente, os três vetores posição \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 estão no mesmo plano tridimensional, em boa aproximação. Esta propriedade de coplanaridade constitui premissa essencial para o desenvolvimento do método.

Matematicamente, a coplanaridade de três vetores em \mathbb{R}^3 implica que eles satisfazem uma relação de dependência linear. Especificamente, existe uma combinação linear de dois deles que reproduz exatamente o terceiro. Do teorema de álgebra linear sobre subespaços bidimensionais do espaço euclidiano tridimensional, pode-se afirmar que

$$\vec{r}_2 = c_1 \vec{r}_1 + c_3 \vec{r}_3, \quad (8.2)$$

onde c_1 e c_3 são coeficientes escalares reais determinados pelas orientações relativas dos vetores. Note que aqui escolhemos \vec{r}_2 como o vetor expressa em termos dos outros dois; esta escolha é arbitrária em princípio, porém será justificada posteriormente pela adoção de t_2 como origem temporal do movimento. A Eq. (8.2) não vincula ainda nenhum dos ρ_i ; ela representa apenas uma propriedade puramente geométrica.

Procedendo com manipulações algébricas sobre a Eq. (8.2), aplicamos o produto vetorial cruzado nos dois lados. Considerando \vec{r}_1 , obtemos:

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = c_1(\vec{r}_1 \times \vec{r}_1) + c_3(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) = c_3(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3). \quad (8.3)$$

Analogamente, multiplicando por \vec{r}_3

$$\vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = c_1(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) + c_3(\vec{r}_3 \times \vec{r}_3) = c_1(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1). \quad (8.4)$$

Estas relações podem ser resumidas como

$$\begin{cases} \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = c_3(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) \\ \vec{r}_3 \times \vec{r}_2 = c_1(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) = -c_1(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) \end{cases} \quad (8.5)$$

Assumindo que $\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \neq \vec{0}$, é legítimo dividir por $\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3\|^2$. Tomando o produto escalar das relações anteriores com $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3)$, obteremos

$$c_3 = \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3\|^2} \quad (8.6)$$

$$c_1 = \frac{(\vec{r}_3 \times \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_3)}{\|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3\|^2} \quad (8.7)$$

Estas expressões fornecem relações explícitas para c_1 e c_3 em termos das posições heliocêntricas, porém tais posições não são ainda conhecidas. Necessita-se, portanto, conectar estes coeficientes com quantidades mensuráveis.

8.2 Coeficientes de Lagrange e Propagação Orbital

A teoria clássica do problema de dois corpos estabelece um conjunto de funções denominadas coeficientes de Lagrange, $f_i(t)$ e $g_i(t)$, que possibilitam expressar o estado orbital em qualquer instante a partir do estado em um instante de referência.

Especificamente, se designamos por $(t_2, \vec{r}_2, \vec{v}_2)$ o estado de referência (posição e velocidade no tempo t_2), então os estados nos tempos t_1 e t_3 escrevem-se como

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = f_1 \vec{r}_2 + g_1 \vec{v}_2 \\ \vec{r}_3 = f_3 \vec{r}_2 + g_3 \vec{v}_2 \end{cases} \quad (8.8)$$

Os coeficientes f_i e g_i dependem dos intervalos temporais e dos parâmetros orbitais, sendo funções bem estabelecidas na mecânica celeste. Suas expressões exatas envolvem funções transcendentais (seno, cosseno e funções elípticas), o que torna impraticável o seu uso em forma fechada para este tipo de problema. Contudo, para intervalos Δt pequenos comparados ao período orbital, expansões em série de Taylor mostram-se suficientemente precisas.

Para fundamentar as expressões dos coeficientes, vamos relembrar que na aproximação de dois corpos sob força gravitacional, a aceleração do objeto é dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \quad (8.9)$$

sendo $\mu = GM_\odot$ o parâmetro gravitacional do Sol, que é a constante de gravitação universal multiplicada pela massa solar. Os coeficientes de Lagrange satisfazem as mesmas equações diferenciais que \vec{r} , com condições iniciais $f_i(t_2) = 1$, $g_i(t_2) = 0$, $\dot{f}_i(t_2) = 0$, $\dot{g}_i(t_2) = 1$.

Vamos definir $\tau_1 = t_1 - t_2$ e $\tau_3 = t_3 - t_2$, de modo que para $\tau_1 < 0$ temos a observação anterior e $\tau_3 > 0$ temos a observação posterior. Vamos introduzir

também a notação $\tau = \tau_3 - \tau_1 = t_3 - t_1 > 0$ para o intervalo temporal total, podemos expandir f_i e g_i em série de Taylor em torno de t_2

$$f_i(\tau_i) = 1 + f'(0)\tau_i + \frac{1}{2}f''(0)\tau_i^2 + \frac{1}{6}f'''(0)\tau_i^3 + O(\tau_i^4) \quad (8.10)$$

$$g_i(\tau_i) = \tau_i + g'(0)\tau_i + \frac{1}{2}g''(0)\tau_i^2 + \frac{1}{6}g'''(0)\tau_i^3 + O(\tau_i^4) \quad (8.11)$$

Das condições iniciais e das equações de movimento, determinam-se as derivadas

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = -\frac{\mu}{r_2^3} \quad (8.12)$$

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = 0, \quad g'''(0) = -\frac{\mu}{r_2^3} \quad (8.13)$$

e consequentemente

$$f_i = 1 - \frac{\mu}{2r_2^3}\tau_i^2 + O(\tau_i^4) \quad (8.14)$$

$$g_i = \tau_i - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_i^3 + O(\tau_i^5) \quad (8.15)$$

Mantendo termos até segunda ordem em τ , reescrevemos como

$$f_i = 1 - \frac{\mu}{2r_2^3}\tau_i^2 + O(\tau_i^4) \quad (8.16)$$

$$g_i = \tau_i \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_i^2 \right) + O(\tau_i^5) \quad (8.17)$$

Substituindo as expressões (8.8) nas relações (8.7) e (8.6) e efetuando o produto vetorial $\vec{r}_1 \times \vec{r}_3$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 &= (f_1 \vec{r}_2 + g_1 \vec{v}_2) \times (f_3 \vec{r}_2 + g_3 \vec{v}_2) \\
 &= f_1 f_3 (\vec{r}_2 \times \vec{r}_2) + f_1 g_3 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) + g_1 f_3 (\vec{v}_2 \times \vec{r}_2) + g_1 g_3 (\vec{v}_2 \times \vec{v}_2) \\
 &= f_1 g_3 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) - g_1 f_3 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) \\
 &= (f_1 g_3 - g_1 f_3) (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2)
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Veja que a quantidade $(f_1 g_3 - g_1 f_3)$ denota o determinante Wronskiano dos coeficientes de Lagrange. Este determinante possui uma expressão conhecida em mecânica celeste

$$f_1 g_3 - g_1 f_3 = \frac{\sin(n(\tau_3 - \tau_1))}{n} = \frac{\tau}{n} \text{sinc}(n\tau/2) \tag{8.19}$$

onde n é a anomalia média média. Para intervalos pequenos, a expansão de Taylor fornece a expressão

$$f_1 g_3 - g_1 f_3 = \left(1 - \frac{\mu}{2r_2^3} \tau_1^2\right) \tau_3 \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3} \tau_3^2\right) - \tau_1 \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3} \tau_1^2\right) \left(1 - \frac{\mu}{2r_2^3} \tau_3^2\right)$$

que pode ser expandida, retendo termos até segunda ordem, gerando a expressão

$$\begin{aligned}
 f_1 g_3 - g_1 f_3 &= \tau_3 - \frac{\mu}{6r_2^3} \tau_3^3 - \tau_1 + \frac{\mu}{6r_2^3} \tau_1^3 - \frac{\mu}{2r_2^3} (\tau_1^2 \tau_3 - \tau_3^2 \tau_1) + O(\tau_i^4) \\
 &= (\tau_3 - \tau_1) + \frac{\mu}{6r_2^3} (\tau_1^3 - \tau_3^3) - \frac{\mu}{2r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) + O(\tau_i^4)
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Agora, note que $\tau = \tau_3 - \tau_1$, portanto $\tau_1 = -(\tau - \tau_3)$. Substituindo

$$f_1 g_3 - g_1 f_3 = \tau + \frac{\mu}{6r_2^3}[(\tau_1^3 - \tau_3^3)] - \frac{\mu}{2r_2^3}\tau_1\tau_3\tau + O(\tau_i^4) \quad (8.21)$$

Note também que

$$\tau_1^3 - \tau_3^3 = (\tau_1 - \tau_3)(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2) = -\tau(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2) \quad (8.22)$$

Para intervalos simétricos em torno de t_2 , ou seja, quando $\tau_1 \approx -\tau_3$, os termos cancelam parcialmente. Mantendo precisão de segunda ordem, obtemos

$$f_1 g_3 - g_1 f_3 \approx \tau - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2) + O(\tau_i^4) \quad (8.23)$$

Para manter apenas termos de segunda ordem em τ , consideramos $\tau^2 = (\tau_3 - \tau_1)^2 = \tau_3^2 - 2\tau_1\tau_3 + \tau_1^2$. Assim, temos

$$f_1 g_3 - g_1 f_3 \approx \tau \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau^2 \right) + O(\tau_i^4) \quad (8.24)$$

Com esta expressão, determinam-se os coeficientes c_1 e c_3 . Utilizando identidades de triplo produto escalar

$$c_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - g_1 f_3}, \quad c_3 = \frac{-g_1}{f_1 g_3 - g_1 f_3} \quad (8.25)$$

e substituindo as expansões

$$c_1 = \frac{\tau_3(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_3^2)}{\tau(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau^2)} = \frac{\tau_3}{\tau} \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_3^2\right) \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau^2\right)^{-1} \quad (8.26)$$

podemos aplicar o teorema binomial $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ para $|x| \ll 1$, e reescrever c_1 como

$$c_1 \approx \frac{\tau_3}{\tau} \left(1 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_3^2\right) \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3}\tau^2\right) + O(\tau^4) \quad (8.27)$$

A partir desta expressão, podemos expandir o produto

$$\begin{aligned} c_1 &\approx \frac{\tau_3}{\tau} \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3}\tau^2 - \frac{\mu}{6r_2^3}\tau_3^2 - \frac{\mu^2}{36r_2^6}\tau^2\tau_3^2\right) + O(\tau^4) \\ &\approx \frac{\tau_3}{\tau} \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3}(\tau^2 - \tau_3^2)\right) + O(\tau^4) \end{aligned} \quad (8.28)$$

e realizar o mesmo para para c_3

$$c_3 \approx \frac{\tau_1}{\tau} \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3}(\tau^2 - \tau_1^2)\right) + O(\tau^4) \quad (8.29)$$

Agora estas expressões contêm agora apenas quantidades conhecidas (os intervalos τ_1 , τ_3 e τ) e a incógnita r_2 , que será determinada através de equações algébricas subsequentes.

8.3 Equações de Distância Topocêntrica

Combinando as equações (8.1) e (8.2), obtém-se

$$c_1(\rho_1\hat{\rho}_1 + \vec{q}_1) = \rho_2\hat{\rho}_2 + \vec{q}_2 - c_3(\rho_3\hat{\rho}_3 + \vec{q}_3) \quad (8.30)$$

que pode ser reescrita como

$$c_1\rho_1\hat{\rho}_1 - \rho_2\hat{\rho}_2 + c_3\rho_3\hat{\rho}_3 + c_1\vec{q}_1 - \vec{q}_2 + c_3\vec{q}_3 = \vec{0} \quad (8.31)$$

Perceba que esta é uma equação vetorial tridimensional. Tomando o produto escalar com $(\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)$, podemos chegar a

$$\begin{aligned} c_1\rho_1[\hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)] - \rho_2[\hat{\rho}_2 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)] + c_3\rho_3[\hat{\rho}_3 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)] \\ + [c_1\vec{q}_1 - \vec{q}_2 + c_3\vec{q}_3] \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) = 0 \end{aligned} \quad (8.32)$$

Os produtos escalares $\hat{\rho}_i \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)$ aparecem como cofatores. Vamos definir as quantidades

$$D_0 = \hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) \quad e D_{i,j} = \vec{q}_i \cdot (\hat{\rho}_j \times \hat{\rho}_k) \quad (8.33)$$

onde (j, k) percorrem as permutações cíclicas de $(1, 2, 3)$. Assim, definimos a matriz

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} \\ D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} \\ D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{q}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) & \vec{q}_1 \cdot (\hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1) & \vec{q}_1 \cdot (\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2) \\ \vec{q}_2 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) & \vec{q}_2 \cdot (\hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1) & \vec{q}_2 \cdot (\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2) \\ \vec{q}_3 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3) & \vec{q}_3 \cdot (\hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1) & \vec{q}_3 \cdot (\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2) \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Aplicando o mesmo procedimento com $(\hat{\rho}_3 \times \hat{\rho}_1)$ e $(\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_2)$, obtém-se um sistema linear em ρ_1, ρ_2, ρ_3

$$c_1 \rho_1 D_0 - \rho_2 \cdot 0 + c_3 \rho_3 \cdot 0 = -[c_1 D_{2,1} - D_{1,1} + c_3 D_{3,1}] \quad (8.35)$$

$$c_1 \rho_1 \cdot 0 - \rho_2 \cdot 0 + c_3 \rho_3 \cdot 0 = -[c_1 D_{2,2} - D_{1,2} + c_3 D_{3,2}] \quad (8.36)$$

$$c_1 \rho_1 \cdot 0 - \rho_2 \cdot 0 + c_3 \rho_3 \cdot 0 = -[c_1 D_{2,3} - D_{1,3} + c_3 D_{3,3}] \quad (8.37)$$

Após um caminho de simplificação por meio de determinantes, obtemos

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{D_0} \left(-D_{2,1} + \frac{1}{c_1} D_{1,1} - \frac{c_3}{c_1} D_{3,1} \right) \\ \rho_2 = \frac{1}{D_0} \left(-c_1 D_{2,1} + D_{1,2} - c_3 D_{3,2} \right) \\ \rho_3 = \frac{1}{D_0} \left(-\frac{c_1}{c_3} D_{2,3} + \frac{1}{c_3} D_{1,3} - D_{3,3} \right) \end{cases} \quad (8.38)$$

Estas expressões ainda contêm c_1 e c_3 , que dependem de r_2 . Necessita-se uma equação adicional que relacione os ρ_i com r_2 de forma mais direta. Substituindo as expressões aproximadas de c_1 e c_3 na equação para ρ_2

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0} \left(-\frac{\tau_3}{\tau} \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3} (\tau^2 - \tau_3^2) \right) D_{2,1} + D_{1,2} - \frac{\tau_1}{\tau} \left(1 + \frac{\mu}{6r_2^3} (\tau^2 - \tau_1^2) \right) D_{3,2} \right) \quad (8.39)$$

e organizando-as, temos

$$\rho_2 = \frac{1}{D_0} \left[-\frac{\tau_3}{\tau} D_{2,1} + D_{1,2} - \frac{\tau_1}{\tau} D_{3,2} \right] \quad (8.40)$$

$$+ \frac{\mu}{6r_2^3 D_0} \left[(\tau^2 - \tau_3^2) \frac{\tau_3}{\tau} D_{2,1} + (\tau^2 - \tau_1^2) \frac{\tau_1}{\tau} D_{3,2} \right] \quad (8.41)$$

Vamos definir outras quantidades

$$A = \frac{1}{D_0} \left[-\frac{\tau_3}{\tau} D_{2,1} + D_{1,2} - \frac{\tau_1}{\tau} D_{3,2} \right] \quad \text{e} \quad (8.42)$$

$$B = \frac{1}{6D_0} \left[(\tau^2 - \tau_3^2) \frac{\tau_3}{\tau} D_{2,1} + (\tau^2 - \tau_1^2) \frac{\tau_1}{\tau} D_{3,2} \right] \quad (8.43)$$

para reescrever a expressão para ρ_2 como

$$\rho_2 = A + \frac{\mu B}{r_2^3} \quad (8.44)$$

Tomando o quadrado do módulo, sabendo que $\vec{r}_2 = \rho_2 \hat{\rho}_2 + \vec{q}_2$ temos

$$r_2^2 = (\rho_2 \hat{\rho}_2 + \vec{q}_2) \cdot (\rho_2 \hat{\rho}_2 + \vec{q}_2) = \rho_2^2 (\hat{\rho}_2 \cdot \hat{\rho}_2) + 2\rho_2 (\hat{\rho}_2 \cdot \vec{q}_2) + q_2^2 \quad (8.45)$$

$$= \rho_2^2 + 2\rho_2 E + q_2^2 \quad (8.46)$$

onde $E = \vec{q}_2 \cdot \hat{\rho}_2$ é a projeção da posição heliocêntrica do observador na direção topocêntrica. Substituindo (8.44) na expressão, obtemos

$$r_2^2 = \left(A + \frac{\mu B}{r_2^3} \right)^2 + 2 \left(A + \frac{\mu B}{r_2^3} \right) E + q_2^2 \quad (8.47)$$

que pode ser expandida, levando a

$$r_2^2 = A^2 + 2A \frac{\mu B}{r_2^3} + \frac{\mu^2 B^2}{r_2^6} + 2AE + 2E \frac{\mu B}{r_2^3} + q_2^2 \quad (8.48)$$

$$= A^2 + 2AE + q_2^2 + \frac{2\mu B(A + E)}{r_2^3} + \frac{\mu^2 B^2}{r_2^6} \quad (8.49)$$

Multiplicando por r_2^6 e rearranjando em forma polinomial

$$r_2^8 - (A^2 + 2AE + q_2^2)r_2^6 - 2\mu B(A + E)r_2^3 - \mu^2 B^2 = 0 \quad (8.50)$$

podemos chegar a este polinômio de grau oito em r_2 . Sua solução fornece a distância heliocêntrica no instante intermediário t_2 . Subsequentemente, as distâncias topocêntricas ρ_1, ρ_2, ρ_3 são determinadas via Eq. (8.38), permitindo construir os vetores posição heliocêntricos \vec{r}_i pela Eq. (8.1).

8.4 Equação Dinâmica do Método de Gauss

Complementando a determinação de \vec{r}_2 , é necessário obter \vec{v}_2 para reconstruir o estado orbital completo. O método de Gauss, análogo ao de Laplace, fundamenta-se numa equação dinâmica que emerge da geometria orbital e das leis de Kepler. Esta equação relaciona quantidades mensuráveis com parâmetros orbitais.

A dedução completa desta equação envolve: (i) diferenciações das equações geométricas, (ii) aplicação de identidades vetoriais em coordenadas de observação, (iii) e manipulações do momento angular orbital. Denotando por \hat{n} o versor normal ao plano orbital, orientado segundo o momento angular, a componente da equação dinâmica perpendicular ao plano orbital escreve-se como

$$\gamma - C \frac{\rho}{q} = \frac{q^3}{r^3} \quad (8.51)$$

Na equação acima, γ constitui uma função dos vetores posição do observador e das direções topocêntricas, dadas por

$$\gamma = \frac{q_2^3 (\tau_3 \vec{q}_1 - \tau \vec{q}_2 + \tau_1 \vec{q}_3) \cdot (\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3)}{\left(\frac{\tau_3 \tau_1}{\tau}\right) (\hat{\rho}_1 \times \hat{\rho}_3) \cdot ([\tau_3 + \tau_1] \vec{q}_1 + [\tau - \tau_1] \vec{q}_3)} \quad (8.52)$$

A quantidade C depende da parametrização orbital específica e das condições iniciais. Esta função γ codifica os efeitos cinemáticos decorrentes da posição do observador não centrada no Sol, bem como das intervalos temporais não uniformes. Sua determinação requer exclusivamente posições geocêntricas da Terra e direções de observação.

Exemplo: Algoritmo de Solução

A resolução prática do método de Gauss procede iterativamente. Os passos fundamentais compõem-se de:

1. **Inicialização:** Obtenha as posições heliocêntricas do observador \vec{q}_i para os três instantes de observação t_1, t_2, t_3 .
2. **Construção das direções topocêntricas:** Converta as coordenadas equatoriais (α_i, δ_i) em versores unitários

$$\hat{\rho}_i = (\cos \delta_i \cos \alpha_i, \cos \delta_i \sin \alpha_i, \sin \delta_i)$$

3. **Cálculo de D_0 e matriz D :** Compute $D_0 = \hat{\rho}_1 \cdot (\hat{\rho}_2 \times \hat{\rho}_3)$ e todos os elementos da matriz D .
4. **Estimativa inicial:** Forneça uma aproximação inicial $r_2^{(0)}$. Uma escolha simplista é assumir $r_2^{(0)} \approx q_2$ (a distância heliocêntrica aproximada do observador).
5. **Iteração:** Para $k = 0, 1, 2, \dots$ até convergência:
 - (a) Calcule $c_1^{(k)}$ e $c_3^{(k)}$ usando a Eq. (8.7) com $r_2^{(k)}$. Se uma aproximação aproximada suficientemente boa é desejada, use as expressões polinomiais.
 - (b) Obtenha $\rho_i^{(k)}$ por meio da Eq. (8.38).
 - (c) Compute $A^{(k)}$ e $B^{(k)}$ conforme definições anteriores.

(d) Resolva o polinômio de oitavo grau (8.50) para obter $r_2^{(k+1)}$.

6. **Teste de convergência:** Verifique se $|r_2^{(k+1)} - r_2^{(k)}|/r_2^{(k)} < \varepsilon$, onde ε é a tolerância desejada (tipicamente 10^{-8} para aplicações de precisão).

7. **Construção do vetor posição:** Uma vez convergido, calcule $\vec{r}_2 = \rho_2 \hat{\rho}_2 + \vec{q}_2$.

8. **Determinação da velocidade:** Utilize as relações de Lagrange (8.8) e as geometrias em t_1 e t_3 para determinar \vec{v}_2 através de diferenças finitas ou diferenciação analítica das expansões em série.

Este algoritmo converge tipicamente em poucas iterações (2 a 5) quando a aproximação inicial não está severamente afastada da solução.

8.5 Comparação entre os Métodos de Gauss e Laplace

Os métodos de determinação orbital de Gauss e Laplace baseiam-se na coplanaridade do movimento, mas diferem na sua abordagem de aproximação.

O **método de Laplace** aplica uma expansão em série de Taylor de segunda ordem ao vetor posição topocêntrico, $\vec{\rho}(t)$. Consequentemente, o movimento do observador, $\vec{q}(t)$, também precisa ser aproximado localmente por uma expansão similar.

Já o **método de Gauss** aplica a aproximação de segunda ordem diretamente ao vetor posição heliocêntrico do objeto, $\vec{r}(t)$. As posições do observador, \vec{q}_i , são utilizadas com seus valores exatos, obtidos a partir de efemérides. Essa abordagem

é vantajosa quando a órbita do observador é conhecida com alta precisão, como no caso de observações a partir da Terra.

Apesar das diferentes abordagens, os métodos convergem sob certas condições. Se a distinção entre as posições topocêntrica e geocêntrica for negligenciada e o instante da observação intermediária for a média dos outros dois ($t_2 = (t_1 + t_3)/2$), as equações de ambos os métodos se tornam equivalentes em primeira ordem.

A escolha entre os métodos depende da geometria observacional e da distribuição temporal das medições. Para intervalos de tempo curtos em relação ao período orbital, os resultados são similares. Para intervalos maiores ou assimétricos, as diferenças entre as abordagens podem se tornar significativas.

Capítulo 9

Refinamento Orbital e Análise de Confiança

E stabelecemos nos capítulos 7 e 8, os métodos para a determinação de uma **órbita preliminar**. Esta órbita representa uma estimativa inicial, um ponto de partida no processo de caracterização do movimento de um corpo celeste recém-descoberto. Tal estimativa é tipicamente baseada em um número mínimo de observações – usualmente três – e em um modelo dinâmico simplificado, o Problema de Dois Corpos, que considera apenas a interação gravitacional entre o objeto e o Sol.

O passo subsequente, que eleva a determinação orbital de uma estimativa inicial para uma solução robusta e preditiva, é o **refinamento orbital**. Este é um processo estatístico iterativo que utiliza *todas* as observações disponíveis, que podem ser centenas ou milhares, para ajustar os parâmetros orbitais iniciais. O objetivo é

minimizar a discrepância entre as posições previstas pelo modelo matemático e as posições efetivamente observadas. Este procedimento, conhecido formalmente como **correção diferencial**, constitui uma aplicação direta e poderosa do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) a um problema não-linear.

Além de encontrar a órbita que melhor se ajusta aos dados (a órbita nominal), o processo de refinamento fornece uma medida quantitativa da incerteza associada a essa solução. Esta análise de confiança, materializada no conceito de **elipsoide de confiança**, é tão importante quanto a própria órbita, pois define a região do espaço de parâmetros onde a órbita verdadeira provavelmente se encontra. Esta informação é a base para a avaliação de risco de impacto e para a propagação de incertezas em previsões futuras.

9.1 Método dos Mínimos Quadrados Não-Linear

Conforme estabelecido no Capítulo 6, o problema consiste em encontrar o vetor de parâmetros $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ que melhor descreve um conjunto de m observações. No contexto do refinamento orbital, o vetor \vec{x} tipicamente contém os seis elementos orbitais que definem o estado do objeto em uma época de referência t_0 , por exemplo, $\vec{x} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$.

O vetor de resíduos, $\vec{\xi}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$, quantifica a diferença entre as m observações (componentes de \vec{O}) e as previsões calculadas a partir do modelo orbital (componentes de $\vec{C}(\vec{x})$):

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \vec{O} - \vec{C}(\vec{x}) \quad (9.1)$$

A função de custo $Q(\vec{x})$, que se busca minimizar, é a soma dos quadrados dos resíduos, ponderada pela incerteza de cada observação. Esta ponderação é formalizada pela matriz de peso W , que é a inversa da matriz de covariância das observações, $W = \Sigma_O^{-1}$.

$$Q(\vec{x}) = \vec{\xi}(\vec{x})^T W \vec{\xi}(\vec{x}) = (\vec{O} - \vec{C}(\vec{x}))^T W (\vec{O} - \vec{C}(\vec{x})) \quad (9.2)$$

A solução ótima, ou a **órbita nominal** \vec{x}^* , é o ponto no espaço de parâmetros \mathbb{R}^n que corresponde ao mínimo global da função de custo $Q(\vec{x})$.

9.1.1 Condição de Mínimo e o Método de Newton

Uma condição necessária para que \vec{x}^* seja um ponto de mínimo é que o gradiente (ou vetor de derivadas parciais) da função de custo se anule nesse ponto:

$$\nabla Q(\vec{x}^*) = \left. \frac{\partial Q}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*} = \vec{0} \quad (9.3)$$

Para calcular este gradiente, aplicamos a regra da cadeia à forma quadrática da Eq. (9.2). A derivada de uma forma quadrática $\vec{z}^T A \vec{z}$ com respeito a \vec{z} é $2\vec{z}^T A$ (assumindo A simétrica). Aqui, $\vec{z} = \vec{\xi}(\vec{x})$ e $A = W$. Portanto, a derivada em relação a $\vec{\xi}$ é $2\vec{\xi}^T W$. A derivada de $\vec{\xi}$ em relação a \vec{x} é a Jacobiana.

Definimos a **matriz Jacobiana** B como a matriz de derivadas parciais das previsões C em relação aos parâmetros x . A matriz B tem dimensões $m \times n$:

$$B(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{C}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \quad (9.4)$$

Como $\vec{\xi} = \vec{O} - \vec{C}$ e \vec{O} é constante, temos $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} = -B$. Aplicando a regra da cadeia para $\nabla Q(\vec{x})$:

$$\nabla Q(\vec{x}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \vec{\xi}} \right) \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \right) = (2\vec{\xi}^T W)(-B) = -2\vec{\xi}(\vec{x})^T W B(\vec{x}) \quad (9.5)$$

A condição de mínimo $\nabla Q = \vec{0}$ resulta no sistema de **equações normais**:

$$B(\vec{x})^T W \vec{\xi}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (9.6)$$

Este sistema de n equações é, em geral, não-linear, pois tanto a matriz Jacobiana B quanto o vetor de resíduos $\vec{\xi}$ dependem de \vec{x} de forma complexa, através da integração numérica da órbita.

Para resolver este sistema, emprega-se um método iterativo, como o **Método de Newton-Raphson**, que busca encontrar o zero do gradiente. Partindo de uma estimativa inicial \vec{x}_k (a órbita preliminar), procuramos uma correção $\Delta \vec{x} = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k$ que nos aproxime da solução. Para tal, expandimos o gradiente $\nabla Q(\vec{x})$ em uma série de Taylor em torno de \vec{x}_k e truncamos em primeira ordem:

$$\nabla Q(\vec{x}_{k+1}) \approx \nabla Q(\vec{x}_k) + H_Q(\vec{x}_k) \cdot (\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) = \vec{0} \quad (9.7)$$

onde $H_Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial \vec{x}^2}$ é a matriz Hessiana de Q . A correção $\Delta \vec{x}$ é, portanto, a solução do sistema linear:

$$H_Q(\vec{x}_k) \Delta \vec{x} = -\nabla Q(\vec{x}_k)^T \quad (9.8)$$

Calculando a Hessiana H_Q a partir da Eq. (9.5):

$$\begin{aligned} H_Q &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\nabla Q^T) = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (-2B^T W \vec{\xi}) \\ &= -2 \left(\frac{\partial B^T}{\partial \vec{x}} W \vec{\xi} + B^T W \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \right) \\ &= -2 (H_\xi W \vec{\xi} + B^T W (-B)) \\ &= 2 (B^T W B - H_\xi W \vec{\xi}) \end{aligned} \quad (9.9)$$

onde $H_\xi = \frac{\partial B^T}{\partial \vec{x}}$ é um tensor tridimensional (um conjunto de n matrizes $m \times n$) que envolve as derivadas de segunda ordem da órbita em relação aos parâmetros. Substituindo a Hessiana e o gradiente na recorrência de Newton (Eq. 9.8), obtemos:

$$\begin{aligned}
2(B_k^T W B_k - H_{\xi,k} W_{\xi k}^{\vec{\xi}}) \Delta \vec{x} &= -(-2B_k^T W_{\xi k}^{\vec{\xi}}) \\
\implies (B_k^T W B_k - H_{\xi,k} W_{\xi k}^{\vec{\xi}}) \Delta \vec{x} &= B_k^T W_{\xi k}^{\vec{\xi}} \quad (9.10)
\end{aligned}$$

Esta é a formulação completa do passo de iteração de Newton.

9.1.2 Método de Gauss-Newton

O método de Newton completo, conforme expresso na Eq. (9.10), é computacionalmente proibitivo para a maioria das aplicações em mecânica celeste. O cálculo do tensor H_{ξ} , que envolve as derivadas de segunda ordem da posição orbital em relação aos parâmetros, é complexo e raramente implementado na prática.

A **aproximação de Gauss-Newton**, que constitui o coração do método de **correção diferencial**, baseia-se em uma simplificação da matriz Hessiana. A premissa é que, ou o modelo se ajusta bem aos dados (tornando os resíduos $\vec{\xi}_k$ pequenos), ou as não-linearidades do problema são suaves. Em qualquer um desses cenários, o segundo termo da Hessiana, $H_{\xi,k} W_{\xi k}^{\vec{\xi}}$, que contém os resíduos, é considerado desprezível em comparação com o primeiro termo, $B_k^T W B_k$.

$$H_Q \approx 2(B^T W B) \quad (9.11)$$

Esta aproximação é bem eficaz na prática. A matriz $C_x = B^T W B$ é conhecida como a **matriz normal** do sistema, uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva semi-definida.

Substituindo esta Hessiana aproximada na equação de recorrência de Newton (Eq. 9.10), obtemos a fórmula de iteração da correção diferencial:

$$(B_k^T W B_k) \Delta \vec{x} = B_k^T W \vec{\zeta}_k \quad (9.12)$$

A correção $\Delta \vec{x}_k$ é então encontrada resolvendo este sistema linear para $\Delta \vec{x}$. A nova estimativa para os parâmetros orbitais é obtida atualizando a estimativa anterior:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \Delta \vec{x}_k = \vec{x}_k + (B_k^T W B_k)^{-1} (B_k^T W \vec{\zeta}_k) \quad (9.13)$$

Este procedimento transforma um problema de otimização não-linear em uma sequência de problemas de mínimos quadrados lineares, que são computacionalmente tratáveis.

9.1.3 Convergência do Processo Iterativo

O processo iterativo de correção diferencial prossegue até que a magnitude da correção $\Delta \vec{x}$ se torne desprezível, indicando que o algoritmo convergiu para um mínimo da função de custo. A convergência é tipicamente monitorada através de uma norma da correção. Uma métrica robusta, que leva em conta a geometria do problema, é a norma ponderada pela matriz normal:

$$\|\Delta\vec{x}\|_{\text{norm}} = \sqrt{\frac{\Delta\vec{x}^T (B^T W B) \Delta\vec{x}}{n}} < \epsilon \quad (9.14)$$

onde n é o número de parâmetros sendo ajustados (a dimensão de \vec{x}) e ϵ é uma tolerância numérica pequena, por exemplo, 10^{-8} . Esta norma mede o comprimento da correção no espaço de parâmetros, escalado pela curvatura da função de custo, fornecendo um critério de parada significativo.

9.2 Elipsoide de Confiança

Uma vez que o processo iterativo converge para a órbita nominal \vec{x}^* , a análise está longe de terminar. Tão importante quanto a solução em si é a quantificação de sua **incerteza**. A órbita verdadeira não é precisamente \vec{x}^* , mas sim um ponto em sua vizinhança, cuja localização é governada pela distribuição de probabilidade dos erros observacionais.

Na vizinhança do mínimo \vec{x}^* , a função de custo $Q(\vec{x})$ pode ser aproximada por uma série de Taylor de segunda ordem:

$$Q(\vec{x}) \approx Q(\vec{x}^*) + \nabla Q(\vec{x}^*) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^*) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}^*)^T H_Q(\vec{x}^*) (\vec{x} - \vec{x}^*) \quad (9.15)$$

Por definição, o gradiente no ponto de mínimo é nulo, $\nabla Q(\vec{x}^*) = \vec{0}$. Definindo o desvio da órbita nominal como $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^*$, a variação na função de custo, $\Delta Q = Q(\vec{x}) - Q(\vec{x}^*)$, é dada por:

$$\Delta Q \approx \frac{1}{2}(\Delta \vec{x})^T H_Q(\vec{x}^*)(\Delta \vec{x}) \quad (9.16)$$

Utilizando a aproximação de Gauss-Newton para a Hessiana (Eq. 9.11), $H_Q(\vec{x}^*) \approx 2(B^T W B)$, obtemos:

$$\Delta Q \approx \frac{1}{2}(\Delta \vec{x})^T (2B^T W B)(\Delta \vec{x}) = (\Delta \vec{x})^T (B^T W B)(\Delta \vec{x}) \quad (9.17)$$

A **matriz de covariância** Γ (de dimensões $n \times n$) da solução \vec{x}^* é definida como a inversa da matriz normal:

$$\Gamma = (B^T W B)^{-1} \quad (9.18)$$

Substituindo $\Gamma^{-1} = B^T W B$ na Eq. (9.17), chegamos à relação :

$$\Delta Q \approx (\Delta \vec{x})^T \Gamma^{-1} (\Delta \vec{x}) \quad (9.19)$$

Esta é a equação de um **elipsoide** no espaço de parâmetros \mathbb{R}^n , centrado em \vec{x}^* . Os eixos principais deste elipsoide são dados pelos autovetores da matriz de covariância Γ , e os comprimentos dos semieixos são proporcionais às raízes quadradas dos autovalores correspondentes. A orientação e o tamanho do elipsoide descrevem a incerteza e as correlações entre os parâmetros orbitais.

A **região de confiança** $Z(k)$ é definida como o conjunto de todas as órbitas aceitáveis \vec{x} cuja função de custo $Q(\vec{x})$ não excede o valor mínimo $Q(\vec{x}^*)$ por mais do que um limiar k^2 :

$$Z(k) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid Q(\vec{x}) \leq Q(\vec{x}^*) + k^2\} \quad (9.20)$$

Combinando as equações, a região de confiança é o interior do elipsoide:

$$(\vec{x} - \vec{x}^*)^T \Gamma^{-1} (\vec{x} - \vec{x}^*) \leq k^2 \quad (9.21)$$

A escolha do parâmetro k (e.g., $k = 1$) define o nível de confiança estatística da região (e.g., o elipsoide de 1-sigma). Esta região Z é de importância capital, pois ela contém o conjunto de **Asteroides Virtuais (VAs)** – um clone de órbitas estatisticamente consistentes com as observações – que são propagados no tempo para avaliar a probabilidade de futuros impactos com o nosso planeta.

9.3 Processo de Obtenção de uma Órbita Definitiva

A determinação da órbita de um asteroide, desde sua descoberta inicial até a sua catalogação e nomeação, é um processo longo, gerenciado por uma entidade central para garantir consistência e confiabilidade.

O *Minor Planet Center* (MPC), operando sob os auspícios da União Astronômica Internacional (IAU), funciona como o repositório global e centro de processamento para todas as observações de corpos menores do Sistema Solar. As

funções do MPC são importantes para a comunidade astronômica e para a defesa planetária, incluindo:

- **Coleta e Verificação:** Receber, validar e arquivar observações astrométricas provenientes de observatórios profissionais e amadores em todo o mundo.
- **Determinação e Refinamento Orbital:** Calcular órbitas preliminares para novos objetos candidatos e realizar o refinamento orbital (correção diferencial) de forma contínua, à medida que mais dados são submetidos.
- **Nomenclatura e Catalogação:** Atribuir designações provisórias a novas descobertas e, eventualmente, números permanentes a objetos cujas órbitas são consideradas bem determinadas.
- **Disseminação de Informações e Avaliação de Risco:** Publicar efemérides (posições futuras previstas) e fornecer os dados orbitais e suas incertezas para organizações, como o *Center for Near-Earth Object Studies* (CNEOS) da NASA, que realizam a avaliação de risco de impacto.

O processo formal para que a órbita de um asteroide seja considerada definitiva (no sentido de ser suficientemente confiável para receber uma numeração permanente) segue uma sequência de etapas bem definidas:

1. **Descoberta e Designação Provisória:** Um astrônomo submete um conjunto de observações de um objeto não identificado ao MPC. Se o objeto não puder ser imediatamente associado a um corpo já conhecido, ele recebe uma **designação provisória**, que codifica o ano e a quinzena da descoberta (e.g., 2023 FZ₅).

2. **Ligação de Oposições:** Uma órbita preliminar, baseada em um arco de observação de poucos dias, é inerentemente incerta. Para que a órbita se torne confiável, o objeto deve ser re-observado em diferentes geometrias e pontos de sua trajetória. O marco mais importante neste processo é a observação do objeto em diferentes **oposições** – momentos em que o objeto, a Terra e o Sol estão aproximadamente alinhados, com a Terra no meio. A capacidade de ligar observações de um mesmo objeto em múltiplas oposições é a prova definitiva de que sua órbita está sendo corretamente modelada.
3. **Numeração (Designação Permanente):** A órbita de um asteroide é considerada suficientemente bem determinada quando é observada em múltiplas oposições, tipicamente quatro para asteroides do cinturão principal. Para Objetos Próximos à Terra (NEOs), cujas órbitas podem ser mais caóticas, este critério pode ser relaxado para duas ou três oposições, desde que o arco de dados seja longo e a incerteza orbital, pequena. Neste ponto, o MPC concede ao objeto um **número permanente** (e.g., (101955) Bennu), que o inscreve oficialmente no catálogo de corpos menores.
4. **Nomeação:** Após a numeração, o descobridor original do objeto recebe o privilégio, por um período de 10 anos, de sugerir um nome. A sugestão é então avaliada pelo *Working Group for Small Body Nomenclature* (WGSBN) da IAU. Se o nome for aprovado, ele se torna oficial e é publicado nos circulares do MPC.

Este processo meticuloso garante que o catálogo de corpos menores do Sistema Solar seja um recurso de alta fidelidade, essencial para a ciência planetária e para a tarefa contínua de monitorar o nosso ambiente cósmico.

Capítulo 10

Avaliação de Risco de Impacto

A possibilidade de colisão entre a Terra e outros corpos celestes, como asteroides e cometas, transcendeu o domínio da ficção científica para se consolidar como uma área ativa e de suma importância na pesquisa astronômica e na defesa planetária. O trabalho seminal de *?*, que propôs um impacto de asteroide como a causa da extinção em massa do Cretáceo-Paleogeno, foi um catalisador para o estudo sistemático dos riscos associados a esses eventos. A subsequente descoberta da cratera de Chicxulub, no México, forneceu a evidência conclusiva que transformou a percepção do risco de impacto de uma hipótese teórica para uma realidade geológica e evolutiva.

A avaliação moderna do risco de impacto constitui uma cadeia de processos interligados: a descoberta de novos objetos, a determinação precisa de suas órbitas (Capítulos 7, *??*, 9), a propagação dessas órbitas no futuro sob a influência de todas as perturbações gravitacionais e não-gravitacionais relevantes

e a quantificação do risco de colisão em face das incertezas orbitais inerentes. Este capítulo foca nas metodologias utilizadas para analisar encontros próximos e estimar a probabilidade de impacto, conectando a mecânica celeste teórica à sua aplicação mais premente.

10.1 Encontros Próximos e o Plano Alvo

A avaliação real do risco requer a análise detalhada de encontros próximos específicos. Durante um encontro rápido, a gravidade do planeta dominador (a Terra, neste caso) torna-se a força principal que atua sobre o asteroide. A trajetória do asteroide em um referencial centrado na Terra (geocêntrico) pode ser aproximada, com grande precisão, por uma hipérbole de dois corpos. O estudo desta trajetória hiperbólica é a base da teoria de encontros de Öpik e do formalismo do **Plano Alvo** (*Target Plane*).

10.1.1 Hipérbole de Encontro e o Foco Gravitacional

Seja \vec{V}_∞ o vetor velocidade geocêntrica do asteroide no infinito, ou seja, antes de sua trajetória ser significativamente curvada pela gravidade terrestre. As propriedades assintóticas desta hipérbole são importantes:

- **Parâmetro de Impacto (b):** A distância perpendicular entre o centro da Terra e a assíntota de aproximação da hipérbole. Se a Terra não tivesse massa, esta seria a distância de máxima aproximação.
- **Velocidade no Infinito ($V_\infty = |\vec{V}_\infty|$):** A velocidade relativa quando o asteroide está longe da influência gravitacional da Terra.

A atração gravitacional da Terra curva a trajetória, um efeito conhecido como **foco gravitacional**. A distância de máxima aproximação real, q_{geo} , é sempre menor que o parâmetro de impacto b . Este efeito também aumenta a seção de choque de colisão do planeta. A relação entre o parâmetro de impacto máximo que resulta em uma colisão (b_{max}) e o raio do planeta (R_P) é dada por:

$$b_{\text{max}}^2 = R_P^2 \left(1 + \frac{2GM_P}{R_P V_{\infty}^2} \right) = R_P^2 \left(1 + \frac{V_{\text{esc}}^2}{V_{\infty}^2} \right) \quad (10.1)$$

onde $V_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_P/R_P}$ é a velocidade de escape na superfície do planeta. O fator de aumento da seção de choque, $F = (b_{\text{max}}/R_P)^2$, é $F = 1 + (V_{\text{esc}}/V_{\infty})^2$. Este fator pode ser significativo, especialmente para encontros com baixa velocidade relativa.

10.1.2 Formalismo do Plano-b

O formalismo de **plano-b**, desenvolvido por ?, é a ferramenta padrão para descrever a geometria de um encontro próximo.

- **Definição:** O plano-b é um plano que passa pelo centro do planeta (a origem) e é ortogonal ao vetor velocidade assintótica de aproximação, \vec{V}_{∞} .
- **Sistema de Coordenadas:** Define-se um sistema de coordenadas ortogonal (ξ, η, ζ) . O eixo ζ é colinear com \vec{V}_{∞} (eixo ao longo da trajetória). Os eixos ξ e η formam o plano-b. A orientação destes eixos no plano pode ser escolhida de várias maneiras; uma convenção comum é alinhar o eixo η com a projeção do vetor velocidade heliocêntrica do planeta no plano-b.

- **Interpretação:** Por definição, a trajetória não perturbada (a assíntota) interceptaria o plano-b na origem $(\xi, \eta) = (0, 0)$. A trajetória real, curvada pela gravidade, intercepta o plano-b em um ponto com coordenadas (ξ_B, η_B) . A distância deste ponto à origem é precisamente o parâmetro de impacto, $b = \sqrt{\xi_B^2 + \eta_B^2}$. As coordenadas (ξ_B, η_B) definem, de forma única e compacta, a geometria do encontro na aproximação hiperbólica.

O plano-b é, portanto, um retrato do encontro. A posição de um asteroide neste plano determina sua distância de máxima aproximação e a deflexão que sua órbita sofrerá.

10.2 Mapeamento da Incerteza Orbital no Plano Alvo

A órbita nominal de um asteroide, sendo a melhor estimativa, corresponde a um único ponto (ξ_0, η_0) no plano alvo. Contudo, devido às incertezas inerentes ao processo de determinação orbital (Capítulo 9), a posição real do asteroide no plano alvo não é um ponto, mas sim uma distribuição de probabilidade em torno da posição nominal.

10.2.1 Aproximação Linear e a Elipse de Confiança

A região de incerteza no espaço de parâmetros orbitais 6D é descrita pela matriz de covariância Γ . Na vizinhança da solução nominal \vec{x}^* , esta região é um elipsoide (Eq. 9.21). O primeiro passo para avaliar o risco de impacto é mapear esta incerteza 6D para o plano alvo 2D.

Na **aproximação linear**, assume-se que o mapeamento $M : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que transforma os parâmetros orbitais \vec{x} nas coordenadas do plano alvo (ξ, η) , pode

ser aproximado por sua linearização (sua matriz Jacobiana) em torno da solução nominal, $J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial \vec{x}}$. A propagação linear da covariância, um resultado padrão da teoria de probabilidades, fornece a matriz de covariância 2×2 no plano alvo:

$$\Gamma_{TP} = J \Gamma J^T \quad (10.2)$$

A matriz Γ_{TP} define uma **elipse de confiança** no plano alvo, centrada na posição nominal (ξ_0, η_0) . A forma e a orientação desta elipse são determinadas pela órbita e pela história observacional do objeto. Frequentemente, a incerteza orbital é muito maior ao longo da direção do movimento do que perpendicular a ela, resultando em elipses alongadas.

A probabilidade de impacto, P_{imp} , é então calculada integrando a densidade de probabilidade 2D (uma Gaussiana bivariada, na aproximação linear) definida pela elipse sobre a área do disco de colisão. Este disco é a seção transversal do planeta, aumentada pelo foco gravitacional (Eq. 10.1):

$$P_{\text{imp}} = \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq b_{\text{max}}^2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Gamma_{TP}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{p}_0)^T \Gamma_{TP}^{-1} (\vec{p} - \vec{p}_0)\right) d\xi d\eta \quad (10.3)$$

onde $\vec{p} = (\xi, \eta)^T$ e $\vec{p}_0 = (\xi_0, \eta_0)^T$.

Esta aproximação linear, embora conceitualmente útil, falha significativamente em várias situações críticas:

1. **Propagação a Longo Prazo:** Quanto maior o intervalo de tempo entre a época da órbita e o encontro, mais as não-linearidades da dinâmica N-corpos distorcem a região de incerteza, que deixa de ser elipsoidal e pode se tornar filamentar e complexa.
2. **Incerteza Orbital Elevada:** Se a órbita inicial é muito incerta (devido a um arco observacional curto), a região de confiança δD é grande, e a aproximação linear do mapeamento M torna-se inválida.
3. **Encontros Muito Próximos:** A forte deflexão gravitacional durante um encontro muito próximo é um processo altamente não-linear, que deforma a região de incerteza.

Como regra geral, a análise linear não é considerada confiável para estimar probabilidades de impacto menores que $\sim 10^{-4}$. Para riscos mais baixos, métodos não-lineares são indispensáveis.

10.3 Métodos Não-Lineares

Para superar as limitações da análise linear, é necessário empregar métodos que amostram diretamente a região de incerteza δD e propaguem cada ponto amostrado numericamente.

10.3.1 Asteroides Virtuais (VAs)

O conceito de **Asteroide Virtual (VA)** é a base da análise de risco moderna. Em vez de propagar apenas a órbita nominal e sua covariância linearizada, a região

de confiança $6D$, $Z(k)$, é discretizada em um grande número de pontos (órbitas). Cada um desses pontos é um VA, representando uma órbita estatisticamente compatível com as observações. O conjunto de todos os VAs forma um enxame que personifica a distribuição de probabilidade da órbita.

Cada VA é então propagado numericamente usando o modelo dinâmico mais completo disponível, incluindo as perturbações de todos os planetas, da Lua, dos maiores asteroides e, quando relevante, forças não-gravitacionais. O comportamento do enxame de VAs ao longo do tempo revela a evolução não-linear da incerteza orbital.

10.3.2 Método de Monte Carlo (MC)

O método de Monte Carlo é a implementação mais direta e conceitualmente simples do paradigma dos VAs.

1. Gera-se um grande número (N_{total}) de VAs, amostrando aleatoriamente a distribuição de probabilidade $6D$ definida pela órbita nominal e sua matriz de covariância Γ (tipicamente uma Gaussiana multivariada).
2. Cada VA é propagado numericamente através do período de interesse.
3. Conta-se o número de VAs ($N_{\text{colisões}}$) que colidem com a Terra (ou seja, cuja trajetória passa a uma distância menor que R_{\oplus} do centro do planeta).
4. A probabilidade de impacto é estimada pela razão: $P_{\text{imp}} \approx N_{\text{colisões}}/N_{\text{total}}$.

O método MC é robusto e converge para a resposta correta, dadas as suposições do modelo. No entanto, sua eficiência é baixa. Para estimar de forma

confiável uma probabilidade de impacto da ordem de 10^{-6} , seriam necessários milhões de VAs, um esforço computacional que pode levar semanas ou meses de tempo de CPU para um único objeto.

10.3.3 Método da Linha de Variações (LOV)

O método da **Linha de Variações (LOV)** é uma técnica semi-analítica e muito mais eficiente, desenvolvida especificamente para lidar com o caso de órbitas inicialmente muito incertas, como as de objetos recém-descobertos com arcos observacionais curtos.

A ideia central é que, para arcos curtos, a incerteza orbital é esmagadoramente dominada por uma única direção no espaço de parâmetros 6D. A região de confiança $Z(k)$ é um elipsoide alongado, assemelhando-se a um fio ou agulha. A LOV é uma curva, parametrizada por uma variável σ , que segue o eixo maior desta região de incerteza.

No caso linear, a LOV é simplesmente a reta definida pelo autovetor \vec{e}_1 associado ao maior autovalor λ_1 da matriz de covariância Γ :

$$\vec{x}(\sigma) = \vec{x}^* + \sigma\sqrt{\lambda_1}\vec{e}_1 \quad (10.4)$$

Em vez de amostrar toda a região 6D, o método LOV amostra VAs apenas *ao longo* desta curva unidimensional. O procedimento é o seguinte:

1. Constrói-se a LOV, parametrizada por σ , que representa o desvio da solução nominal em unidades de desvio padrão.

2. Amostra-se um conjunto de VAs ao longo desta linha (e.g., para σ de -3 a +3 em passos de 0.01).
3. Cada VA, $\vec{x}(\sigma_k)$, é propagado numericamente, e para cada encontro próximo, a posição (ξ_k, η_k) no plano alvo é registrada.
4. A sequência de pontos (ξ_k, η_k) traça a projeção da LOV no plano alvo. Esta curva revela como a posição do encontro varia em função do desvio ao longo da direção de maior incerteza.

Se a curva LOV projetada no plano alvo intercepta o disco de colisão da Terra, então existe um intervalo de valores de σ , digamos $[\sigma_{\text{in}}, \sigma_{\text{out}}]$, que corresponde a **Impactadores Virtuais (VIs)**. A probabilidade de impacto pode então ser estimada integrando a densidade de probabilidade (que é aproximadamente uma Gaussiana padrão em σ) sobre este intervalo:

$$P_{\text{imp}} \approx \int_{\sigma_{\text{in}}}^{\sigma_{\text{out}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2/2} d\sigma = \frac{1}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{\sigma_{\text{out}}}{\sqrt{2}} \right) - \text{erf} \left(\frac{\sigma_{\text{in}}}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (10.5)$$

A vantagem da LOV é sua eficiência: apenas algumas centenas de VAs são necessários para mapear o risco, permitindo análises quase em tempo real para objetos recém-descobertos. Sua principal limitação é que ela só captura a incerteza ao longo da direção dominante; se a incerteza nas direções transversais também for significativa (o que acontece para arcos observacionais mais longos), a LOV pode subestimar o risco.

10.4 Sistemas de Monitoramento Operacional

A análise de risco de impacto é realizada de forma contínua e operacional por dois sistemas principais, que implementam as metodologias descritas acima:

- **Sentry:** Operado pelo *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) da NASA (<https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>).
- **NEODyS (Near Earth Objects Dynamic Site):** Operado pela Universidade de Pisa e pela empresa SpaceDyS, com financiamento da Agência Espacial Europeia (ESA) (<https://newton.spacedys.com/neodys/>).

Estes sistemas monitoram continuamente o catálogo de Objetos Próximos à Terra (NEOs), identificam encontros futuros até 100 anos ou mais, e calculam as probabilidades de impacto. Os resultados são publicados em tabelas de risco acessíveis ao público. Os dois sistemas operam de forma independente, utilizando diferentes implementações de software, o que permite a validação cruzada dos resultados e aumenta a robustez das avaliações de risco.

Capítulo 11

Caso (99942) Apophis

A possibilidade de um impacto catastrófico por um asteroide ou cometa transformou-se de um tema de ficção em uma área de pesquisa científica rigorosa e de preocupação para a defesa planetária, particularmente após a confirmação da hipótese de ? sobre a extinção Cretáceo-Paleogeno. Nas últimas décadas, os programas de busca por Objetos Próximos à Terra (NEOs) e os sistemas de monitoramento de risco tornaram-se cada vez mais sofisticados.

O asteroide 99942 Apophis representa um dos casos mais emblemáticos e instrutivos na história recente da avaliação de risco de impacto. Sua descoberta e o subsequente monitoramento ilustram vividamente os desafios, as metodologias e a evolução da nossa capacidade de prever e quantificar ameaças cósmicas.

11.1 Descoberta e Alarme Inicial

O objeto foi descoberto em 19 de junho de 2004 por Roy Tucker, David Tholen e Fabrizio Bernardi no Observatório Nacional de Kitt Peak, recebendo a designação provisória **2004 MN₄**. Foi observado apenas por duas noites, e a astrometria inicial não foi precisa o suficiente para garantir sua recuperação imediata, levando à sua perda temporária.

Em 18 de dezembro de 2004, Gordon Garradd, do Observatório de Siding Spring na Austrália, redescobriu o asteroide independentemente. Com as novas observações, rapidamente se tornou claro que 2004 MN₄ era um Objeto Próximo à Terra (NEA) com uma órbita que o traria perigosamente perto da Terra.

11.1.1 Primeiras Avaliações de Risco

Com um arco observacional ainda muito curto (apenas 1.7 dias após a redescoberta), os dois principais sistemas de monitoramento de risco de impacto, **Sentry** (JPL/NASA) e **NEODyS** (Universidade de Pisa/ESA), começaram a sinalizar uma probabilidade não desprezível de colisão.

Em 20 de dezembro de 2004, ambos os sistemas indicaram uma probabilidade de impacto (PI) da ordem de 2×10^{-4} (1 em 5000) para um encontro em **13 de abril de 2029**. Esta probabilidade, embora pequena em termos absolutos, era alta para uma previsão tão distante.

A situação tornou-se mais preocupante quando as observações originais de junho de 2004 foram localizadas e ligadas às de dezembro (um processo de *precovery*), estendendo o arco observacional para seis meses. Este arco mais longo

permitiu um refinamento orbital significativo, mas, surpreendentemente, *confirmou* a possibilidade de impacto em 2029 (?).

Nos dias seguintes, a comunidade astronômica global intensificou as observações.

- **23 de dezembro:** Novas observações e reanálise dos dados de junho elevaram a PI para 0.4% (1 em 250). O site do Sentry publicou uma imagem da Linha de Variações (LOV) mostrando a Terra dentro da região de incerteza para 2029 (Figura 11.1, painel esquerdo).
- **24 de dezembro:** A PI subiu para 1.6% (1 em 62), um valor sem precedentes para um impacto previsto com décadas de antecedência.
- **27 de dezembro (manhã):** Com mais dados, a PI atingiu um pico alarmante de 2.7% (1 em 37). O asteroide recebeu a classificação 4 na Escala de Torino, a mais alta já atribuída.

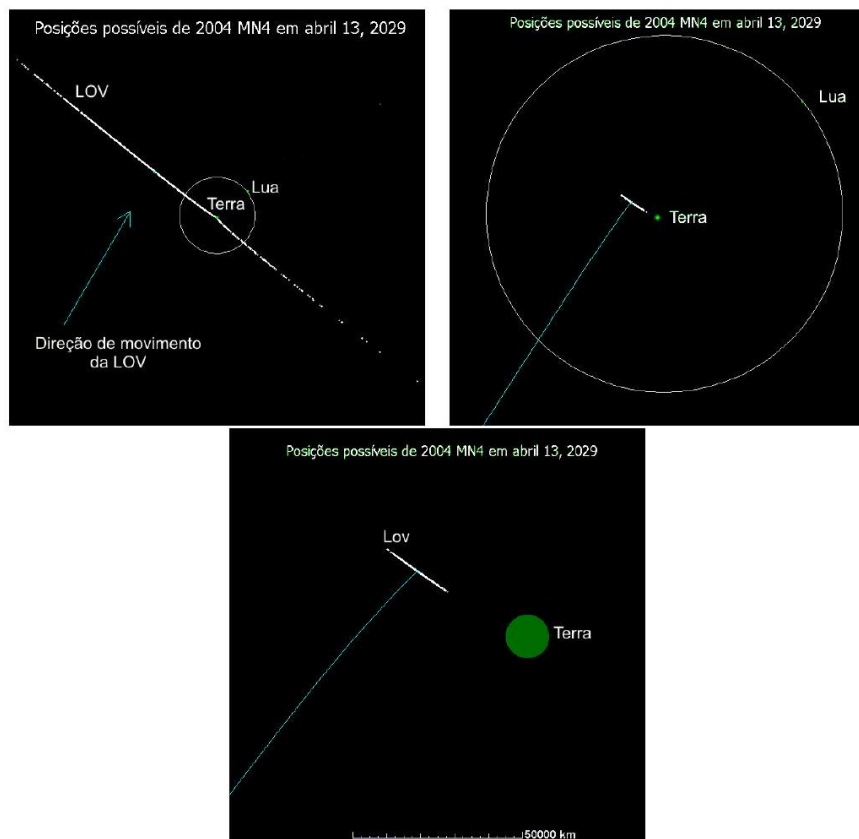


Figura 11.1: Evolução da projeção da Linha de Variações (LOV) de 2004 MN₄ no plano alvo para o encontro de 13 de abril de 2029. **Esquerda:** Em 23 de dezembro de 2004, a LOV (curva diagonal) interceptava claramente a Terra (círculo central), indicando uma probabilidade de impacto significativa ($\approx 0.4\%$). **Direita:** Em 27 de dezembro de 2004, após a inclusão de dados de *precovery* de março de 2004, a LOV deslocou-se, eliminando o risco de impacto em 2029, mas indicando um encontro bem próximo. A elipse representa a incerteza ($\pm 3\sigma$). (Fonte: Adaptado de JPL/NASA NEO Program)

11.2 Refinamento Orbital e Eliminação do Risco de 2029

A rápida escalada da probabilidade de impacto destacou a urgência de encontrar observações adicionais, especialmente aquelas que pudessem estender significativamente o arco orbital para o passado (*precovery*).

Na tarde de 27 de dezembro de 2004, astrônomos do projeto *Spacewatch* localizaram imagens de *precovery* do asteroide datando de **março de 2004**. A inclusão destas observações estendeu o arco orbital para quase 9 meses.

O resultado foi imediato e dramático: a nova solução orbital eliminou completamente a possibilidade de impacto em 2029. A LOV recalculada passou a uma distância segura da Terra (Figura 11.1, painel direito). Este episódio demonstrou o poder de um arco observacional longo para restringir a evolução orbital e reduzir as incertezas.

Embora o risco de 2029 estivesse descartado, a órbita refinada previa um encontro *extremamente* próximo em 13 de abril de 2029. Para caracterizar melhor este encontro e avaliar riscos futuros (particularmente em 2036), eram necessárias observações de maior precisão.

Em janeiro de 2005, o Observatório de Arecibo realizou observações de **radar** de 2004 MN₄. Observações de radar são cruciais porque medem diretamente:

- **Distância (Range):** Através do tempo de ida e volta do sinal (precisão de metros).
- **Velocidade Radial (Range-Rate):** Através do desvio Doppler do sinal refletido (precisão de mm/s).

Estas medições diretas de distância e velocidade radial complementam as observações ópticas (que medem apenas ângulos), quebrando degenerescências e reduzindo as incertezas orbitais, especialmente na direção radial.

Com os dados de radar de Arecibo, a trajetória de 2029 foi refinada para prever uma passagem a uma distância geocêntrica de $\approx 38\,400$ km ($\approx 6R_{\oplus}$), bem dentro da órbita dos satélites geossíncronos ($\approx 42\,200$ km).

Com a órbita agora considerada segura para 2029 e bem determinada, o asteroide recebeu o número permanente **99942** em junho de 2005 e, em julho de 2005, foi nomeado **Apophis**: o deus egípcio da destruição e escuridão.

11.3 Avaliação de Riscos Futuros: 2036 e Além

O encontro próximo de 2029, embora não representasse um impacto direto, levantou a possibilidade de um impacto em datas subsequentes, principalmente em **13 de abril de 2036**.

Um encontro próximo com um planeta altera significativamente a órbita heliocêntrica de um asteroide devido à deflexão gravitacional. A magnitude e direção exatas desta alteração dependem precisamente de quão perto e por qual "lado" do planeta o asteroide passa.

Existe uma pequena região no plano alvo do encontro de 2029, chamada de **"keyhole" (buraco de fechadura) gravitacional**, tal que se Apophis passasse por ela, a deflexão gravitacional da Terra o colocaria em uma trajetória de colisão sete anos depois, em 2036.

A análise de risco pós-2005 focou em determinar se a região de incerteza da trajetória de 2029 interceptava este keyhole de 2036.

- **Após dados de radar de 2005:** A probabilidade de impacto em 2036 foi estimada em ≈ 1 em 45.000.
- **Revisão em 2009:** Com mais observações ópticas e refinamentos computacionais, a probabilidade caiu para ≈ 4 em 1.000.000 (1 em 250.000).

Apesar de baixa, a probabilidade não era zero, e dependia crucialmente de efeitos sutis.

11.3.1 Efeito Yarkovsky

Para previsões de longo prazo de asteroides pequenos (como Apophis, com $D \approx 340$ m), a dinâmica não é puramente gravitacional. No sistema Solar, os corpos absorvem uma parte da luz do Sol que incide sobre as suas superfícies, e reemitem esta energia principalmente em comprimentos de onda na região do infravermelho e do térmico. O Efeito Yarkovsky é um fenômeno não conservativo produzido pela reemissão térmica da luz solar que incide na superfície de um corpo sem atmosfera e em rotação. Este efeito é particularmente significativo para os asteroides com diâmetros entre 0,01 - 500 metros (?) e totalmente desprezível para objetos com mais de 20km de diâmetro. Este efeito pode ser dividido em duas componentes que atuam simultaneamente (?): uma componente **diurna**, que depende do período de rotação do corpo, da inclinação do eixo de rotação e da distribuição longitudinal da temperatura na sua superfície; e uma componente **sazonal**, que depende do período orbital do corpo e da distribuição latitudinal da temperatura na sua superfície.

A modelagem matemática do efeito Yarkovsky envolve basicamente duas etapas, a primeira delas é a determinação da distribuição superficial de temperatura e em seguida, avaliar a força de recuo exercida pela reemissão térmica do

corpo. Para a primeira etapa, precisamos levar em consideração a inércia térmica do material na superfície do corpo. É conveniente adotar uma aproximação linearizada para o problema considerando pequenas diferenças de temperatura em relação a um valor médio. Para a segunda etapa assume-se uma simetria esférica para a forma do asteroide, o que possibilita obter uma expressão analítica em termos de harmônicos esféricos para a força de recuo. As aproximações adotadas são adequadas para obter representações analíticas do Efeito Yarkovsky com nível de precisão satisfatório para a maior parte das aplicações em dinâmica de asteroides. No entanto, para casos que envolvem corpos de forma irregular ou órbitas altamente excêntricas, é necessário recorrer a um tratamento numérico das equações, o que demanda maior esforço computacional e proporciona resultados mais detalhados. Para incorporação do efeito Yarkovsky na análise da evolução orbital de um asteroide basta adicionar uma força não conservativa às equações de movimento de tal maneira que esta produza uma variação do semieixo orbital.

Resumo do Mecanismo:

1. É uma força ou impulso térmico que atua sobre corpos em rotação no espaço, como meteoroides e asteroides.
2. O efeito ocorre devido à emissão anisotrópica de fótons termais, que carregam momentum quando o corpo aquece ao receber a radiação solar e depois resfria.
3. A mudança de temperatura do objeto leva tempo, causando uma diferença entre a direção da radiação solar recebida e a radiação térmica emitida.

O efeito líquido depende do sentido de rotação:

- **Rotação Prograda:** O impulso tem uma componente na direção do movimento orbital, causando um aumento lento do semieixo maior ($da/dt > 0$) e uma espiral para fora.
- **Rotação Retrógrada:** O impulso tem uma componente oposta ao movimento, causando $da/dt < 0$ e uma espiral para dentro.

A magnitude da deriva da/dt depende de:

- Tamanho (maior para objetos menores).
- Período de rotação e obliquidade (inclinação do eixo de rotação).
- Propriedades da superfície: albedo, emissividade, condutividade térmica, densidade.

Para Apophis, a incerteza no estado de rotação e nas propriedades térmicas impedia uma modelagem precisa do efeito Yarkovsky, adicionando uma incerteza significativa à posição prevista para 2029 e, consequentemente, à probabilidade de passar pelo keyhole de 2036.

11.3.2 Eliminação Definitiva do Risco (2021)

A chave para resolver a ambiguidade do Yarkovsky e refinar a trajetória de longo prazo veio com novas observações de alta precisão. Em março de 2021, Apophis fez uma passagem distante pela Terra, permitindo observações de radar com o Goldstone Solar System Radar e o Green Bank Telescope.

Estas observações foram precisas o suficiente para:

1. Medir diretamente a aceleração Yarkovsky (da/dt) de Apophis.

2. Refinar a órbita a ponto de excluir a passagem pelo keyhole de 2036 (e qualquer outro keyhole significativo por pelo menos 100 anos) com alta confiança estatística.

Em março de 2021, a NASA anunciou que Apophis estava **removido da lista de risco** para 2036 e para o próximo século.

11.4 Enfim Apophis

Embora não represente mais uma ameaça, o encontro próximo de Apophis em 13 de abril de 2029 oferece uma oportunidade científica única. A passagem a $\approx 38\,400$ km do centro da Terra ($\approx 32\,000$ km da superfície) será visível a olho nu de partes da Europa, África e Ásia Ocidental.

Esta passagem permitirá estudos detalhados do asteroide:

- **Efeitos de Maré:** A passagem dentro do campo gravitacional da Terra induzirá tensões de maré no asteroide. A observação de possíveis mudanças na rotação, ou mesmo na estrutura superficial (deslizamentos, reconfiguração de regolito), fornecerá informações sobre a estrutura interna e a resistência de Apophis.
- **Caracterização Física:** Observações intensivas (radar, óptico, infravermelho) permitirão mapear a forma, rotação, composição e propriedades térmicas com detalhes sem precedentes a partir da Terra.
- **Missões Espaciais:** A missão OSIRIS-APEX (anteriormente OSIRIS-REx, redirecionada após visitar Bennu) está a caminho para encontrar Apophis logo após o encontro de 2029, realizando estudos *in situ*.

Exemplo: Estimativa do Tamanho de Apophis

Apophis tem uma magnitude absoluta $H \approx 19.7$. Observações indicam que é um asteroide do tipo Sq (transição entre S e Q), com um albedo geométrico $p \approx 0.33$. Estime seu diâmetro D .

Solução: Utilizamos a relação diâmetro-magnitude-albedo (Eq. (??)):

$$D(\text{km}) = \frac{1329 \text{ km}}{\sqrt{p}} 10^{-0.2H} \quad (11.1)$$

Com $H = 19.7$ e $p = 0.33$:

- $\sqrt{p} = \sqrt{0.33} \approx 0.5745$
- $10^{-0.2H} = 10^{-0.2 \times 19.7} = 10^{-3.94} \approx 1.148 \times 10^{-4}$

Substituindo:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1329 \text{ km}}{0.5745} \cdot (1.148 \times 10^{-4}) \\ &\approx (2313,3 \text{ km}) \cdot (1.148 \times 10^{-4}) \\ D &\approx 0,2655 \text{ km} \quad \text{ou} \quad 266 \text{ metros} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Estimativas mais recentes, baseadas em observações térmicas (Herschel) e radar, indicam um diâmetro médio de ≈ 340 metros. A diferença pode vir de um albedo ligeiramente diferente ou da forma irregular do asteroide.

Apophis tem um tamanho da ordem de 300 metros, colocando-o firmemente na categoria de objetos capazes de causar devastação regional severa em caso de impacto.

Exemplo: Ordem de Grandeza do Efeito Yarkovsky

Medições da deriva orbital de Apophis indicam $da/dt \approx -170 \text{ m/ano}$ (rotação retrógrada). Qual a mudança total no semieixo maior entre 2004 e 2029 (25 anos)? Qual o deslocamento correspondente na posição orbital?

Solução: 1. Mudança no Semieixo Maior (Δa): Assumindo da/dt constante:

$$\begin{aligned}\Delta a &= (da/dt) \cdot \Delta t \\ &= (-170 \text{ m/ano}) \cdot (25 \text{ anos}) \\ \Delta a &= -4250 \text{ m} = -4,25 \text{ km}\end{aligned}\tag{11.3}$$

2. Deslocamento Orbital (ΔL): Uma mudança em a causa uma mudança no período orbital $T \propto a^{3/2}$, e consequentemente na posição ao longo da órbita. A mudança na longitude média $L = M + \Omega + \omega$ (ou simplificadaamente, na anomalia média M) devido a uma deriva constante da/dt ao longo de um tempo Δt é:

$$\Delta L \approx -\frac{3}{2}n \left(\frac{da/dt}{a} \right) \frac{(\Delta t)^2}{2}\tag{11.4}$$

Onde $n = \sqrt{k^2/a^3}$ é o movimento médio. Dados para Apophis: $a \approx 0,922 \text{ UA} \approx 1,38 \times 10^{11} \text{ m}$. $n = 2\pi/T \approx 2\pi/(0,89 \text{ anos}) \approx 7,06 \text{ rad/ano} \approx 2,24 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$.

$$\Delta L \approx -\frac{3}{4}(2,24 \times 10^{-7} \text{ rad/s}) \left(\frac{-170 \text{ m/ano}}{1,38 \times 10^{11} \text{ m}} \right) (25 \text{ anos})^2$$

$$(-170 \text{ m/ano}) \approx -5,39 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$\frac{da/dt}{a} \approx \frac{-5,39 \times 10^{-6} \text{ m/s}}{1,38 \times 10^{11} \text{ m}} \approx -3,9 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$$

$$(25 \text{ anos}) \approx 7,88 \times 10^8 \text{ s} \implies (\Delta t)^2 \approx 6,21 \times 10^{17} \text{ s}^2$$

$$\Delta L \approx -\frac{3}{4}(2,24 \times 10^{-7} \text{ rad/s})(-3,9 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1})(6,21 \times 10^{17} \text{ s}^2)$$

$$\Delta L \approx +4.08 \text{ rad} \quad (11.5)$$

Este ΔL é um ângulo. O deslocamento físico ao longo da órbita é $\Delta s = a\Delta L$:
 $\Delta s \approx (1,38 \times 10^{11} \text{ m})(4.08) \approx 5,63 \times 10^{11} \text{ m} \approx 563 \text{ 000 km}$.

Embora a mudança no semieixo maior seja pequena ($\approx 4 \text{ km}$), o efeito cumulativo sobre a posição orbital ao longo de 25 anos é enorme ($\approx 560 \text{ 000 km}$), muito maior que o tamanho da Terra ou do keyhole de 2036. Isso ilustra por que a medição precisa do efeito Yarkovsky era essencial para eliminar o risco.

Referências

- Alvarez, Luis W. et al. (1980). "Extraterrestrial cause for the Cretaceous-Tertiary extinction". Em: *Science* 208.4448, pp. 1095-1108.
- Battin, Richard H. (1999). *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Revised Edition. AIAA Education Series.
- Bowell, Edward e Karri Muinonen (1994). "A new method for calculating minimum orbit intersection distances". Em: *Asteroids, Comets, Meteors 1993*. Ed. por Andrea Milani, Mario Di Martino e Alberto Cellino. Vol. 160. IAU Symposium. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 77-80.
- Charlier, Carl Vilhelm Ludvig (1910). "Beiträge zur Störungstheorie". Alemão. Em: *Astronomische Nachrichten* 183.13, pp. 193-202.
- Chodas, Paul W., Steven R. Chesley et al. (2002). "Sentry: An Automatic Near-Earth Asteroid Collision Monitoring System". Em: *Bulletin of the American Astronomical Society* 34, p. 868.
- Chodas, Paul W. e Donald K. Yeomans (1994). "The orbital motion and impact circumstances of Comet Shoemaker-Levy 9". Em: *The Collision of Comet Shoemaker-Levy 9 and Jupiter*. IAU Colloquium 156, Abstract booklet, p. 26.

- Danby, J. M. A. (1988). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. 2ª ed. Richmond: Willmann-Bell.
- (1992). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. 2, Revised. Richmond: Willmann-Bell.
- Farinella, Paolo, David Vokrouhlický e William K Hartmann (1998). “Meteorite delivery via Yarkovsky orbital drift”. Em: *Icarus* 132.2, pp. 378–387.
- Gauss, Carl Friedrich (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Hamburg: Frid. Perthes et J. H. Besser.
- Goldstein, Herbert, Charles Poole e John Safko (2002). *Classical Mechanics*. 3rd Edition. Addison-Wesley.
- Greenberg, Richard (1988). “Orbital evolution of impact ejecta from Phobos and Deimos”. Em: *Icarus* 75.1, pp. 1–29.
- Gronchi, Giovanni F. (2005). “An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two Keplerian orbits”. Em: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 93.1–4, pp. 315–341.
- Hoskin, Michael, ed. (1999). *The Cambridge Concise History of Astronomy*. Ver capítulo sobre a descoberta de Ceres. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hsi, Tsê-tsung (1988). *Ancient and mediaeval observations of comets and novae in Chinese sources*. VNU Science Press.
- Jeans, J. H. (1902). “The Stability of a Spherical Nebula”. Em: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 199, pp. 1–53.
- Jolliffe, Ian T. (2002). *Principal Component Analysis*. 2ª ed. New York: Springer.
- Kalas, P. et al. (fev. de 2000). *Rings in the Planetesimal Disk of β Pictoris*. doi: 10.1086/312494. url: <http://dx.doi.org/10.1086/312494>.

- Kant, I. (1755). *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. (Universal Natural History and Theory of the Heavens).
- Kizner, William (1959). *A method of describing missile trajectories*. External Publication 674. Pasadena: Jet Propulsion Laboratory.
- Kraus, Stefan et al. (set. de 2020). "A triple-star system with a misaligned and warped circumstellar disk shaped by disk tearing". Em: *Science* 369.6508, pp. 1233–1238. issn: 1095-9203. doi: 10.1126/science.aba4633. url: <http://dx.doi.org/10.1126/science.aba4633>.
- Laplace, Pierre-Simon (1796). *Exposition du système du monde*. Paris: Imprimerie du Cercle-Social.
- (1799). *Traité de mécanique céleste*. Vol. 1. Paris: Crapelet.
- Marsden, Brian G. (1991). "The computation of orbits in minor planet and comet work". Em: *Asteroids II*. Ed. por Richard P. Binzel, Tom Gehrels e Mildred S. Matthews. Tucson: University of Arizona Press, pp. 159–183.
- Marsden, Brian G. e Gareth V. Williams (2008). "The MPC: Recent Advances". Em: *Bulletin of the American Astronomical Society* 40, p. 415.
- Merriam-Webster (2008). *Solar system*. Merriam-Webster Online Dictionary. Acessado em [data].
- Milani, Andrea (2002). "Asteroid Orbit Computation". Em: *Asteroids III*. Ed. por R. P. Binzel, M. S. Matthews e A. W. Harris. Tucson: University of Arizona Press, pp. 27–43.
- Milani, Andrea, Steven R. Chesley, Paul W. Chodas et al. (2002). "Asteroid close approaches: Analysis and potential impact detection". Em: *Asteroids III*. Ed. por Richard P. Binzel, Tomasz Gehrels e Mildred S. Matthews. Tucson: University of Arizona Press, pp. 55–69.

- Milani, Andrea, Steven R. Chesley, Maria Eugenia Sansaturio et al. (2004). "Non-gravitational perturbations and the Tunguska event". Em: *Icarus* 172.2, pp. 620–630.
- (2005). "Theory of asteroid hazard assessment". Em: *Asteroids, Comets, Meteors* 2005. Ed. por D. Lazzaro, S. Ferraz-Mello e J. A. Fernández. Vol. 229. IAU Symposium. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 355–374.
- Milani, Andrea, Steven R. Chesley e Giovanni B. Valsecchi (1999). "Asteroid close encounters with the planets: The Öpik theory revisited". Em: *Icarus* 141.2, pp. 379–399.
- Milani, Andrea e Giovanni Federico Gronchi (2010). *Theory of Orbit Determination*. O texto refere-se a 2009, provável ano de primeira publicação ou manuscrito. Cambridge: Cambridge University Press.
- Minor Planet Center (2024). *New-Style Provisional Designations*. url: <https://www.minorplanetcenter.net/iau/info/OldDesDoc.html> (acesso em 25/10/2025).
- Morbidelli, A. et al. (2002). "Asteroids". Em: *Asteroids III*. Ed. por R. P. Binzel, M. S. Matthews e A. W. Harris. University of Arizona Press, pp. 409–422.
- Muironen, Kari (2001). "Asteroid and comet encounters". Em: *Proceedings of the Third European Conference on Space Debris*. Ed. por Barbara Warmbein. Vol. 1. ESA SP-473. Noordwijk: European Space Agency, pp. 415–420.
- Muironen, Kari e Edward Bowell (1992). "Asteroid orbit determination using Bayesian probabilities". Em: *Asteroids, Comets, Meteors* 1991. Ed. por Alan W. Harris e Edward Bowell. Houston: Lunar e Planetary Institute, pp. 417–420.
- Murray, C. D. e S. F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.

- Öpik, Ernst J. (1976). *Interplanetary Encounters: Close-Range Gravitational Interactions*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company.
- Piazzi, G. (1801). “Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinandea”. Em: *Opere di G. Piazzi* II, pp. 119–146.
- Safronov, V. S. (1969). *Evolution of the Protoplanetary Cloud and Formation of the Earth and the Planets*. Tradução para o inglês pela NASA, 1972 (NASA TTF-677). Moscow: Nauka Press.
- Spitale, JN e R Greenberg (1999). “Numerical investigation of the Yarkovsky effect: mutiny on the high e’s.” Em: *Bulletin of the Astronomical Society*, Vol. 31, No. 4, p. 1112, id. 24.05. Vol. 31, p. 1112.
- Stephenson, F. Richard e David A. Green (2002). *Historical Supernovae and their Remnants*. Inclui discussões sobre registros históricos asiáticos. Oxford: Oxford University Press.
- Tapley, Byron D., Bernard E. Schutz e George H. Born (2004). *Statistical Orbit Determination*. Amsterdam: Elsevier Academic Press.
- Wetherill, G. W. (1989). “Origin of the asteroid belt”. Em: *Asteroids II*. Ed. por R. P. Binzel, T. Gehrels e M. S. Matthews. University of Arizona Press, pp. 661–680.
- Wisniowski, M. e Hans Rickman (1984). “MOID: An improved algorithm for computation of the minimum distance between two elliptic orbits”. Em: *Acta Astronomica* 34, pp. 361–377.

Índice Remissivo

Acréscão, 30–32

Afélio, 20, 21, 42, 46, 47, 51

albedo geométrico, 13

Anomalia

Excêntrica, 53–55

Média, 51–53, 55, 93

Verdadeira, 40, 42, 46, 50, 53,

55

Apophis, 173

Arco Observacional, 7, 86, 87, 93,

168

Asteroide, 10–12

Asteroides

Cinturão Principal de, 8, 19

Asteroides Próximos à Terra NEA, 19

Ceres, 2, 5–10

Cometa, 3, 10

Cometas Próximos à Terra NEC, 19

Correção Diferencial, 101, 104, 107,

152, 156, 157, 161

Eclíptica, 47, 49

Elementos Orbitais, 19, 44, 47, 49,

50, 55, 57, 67, 152

Gauss, Método, 88, 105, 134, 147,

156

Hill, Esfera de, 73, 93

Integrais do Movimento, 61, 64, 65

Jacobi, Constante de, 71

Lagrange, Pontos de, 58, 71–73

- Laplace, Método de, 88, 105, 107,
108, 110, 112, 125, 128,
132
- Magnitude Absoluta, 12, 13, 15, 16,
21, 91
- Matriz de Covariância, 90, 92, 93,
100, 101, 103, 104, 153,
159, 166, 167, 169, 170
- MOID, Distância Mínima de
Interseção Orbital, 21, 23,
91
- NEODyS, 92, 172
- Objeto Potencialmente Perigoso
PHA, 21, 91, 92
- Objeto Próximo à Terra NEO, 18,
162, 172
- Periélio, 18–21, 40, 42, 46–51, 55
- Planeta, 5, 6, 9, 31, 81
Anão, 9, 10
- Plano Orbital, 39, 40, 47, 48, 50, 53,
77
- Pontos Vernal, 47–49
- Referencial Girante, 70–72, 75
- Roche, Limite de, 73–75
- Titius-Bode, Relação de, 5–7
- Yarkovsky, Efeito, 89, 97, 179
- Órbita
Nominal, 89, 90, 92, 100, 101,
103, 104, 152, 153, 158,
166, 168, 169
Osculadora, 50, 67
Preliminar, 87–89, 101, 105,
107, 128, 130, 151, 154,
162

ditora



ISBN: 978-65-89356-13-4

CDL



9 786589 356134